

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR I1 – MME170

18 januari 2002
08.45 – 13.45 (5 timmar)

Lärare: Lars Sonnerup, tel: 070 4850689

Maximal poäng är 18. För godkänt krävs 9 poäng. Betyg ges sammanvägt med del A i kursen (statik).

ALLMÄNT

Hjälpmedel

1. Läroböcker i hållfasthetslära och mekanik.
2. Handböcker, formelsamlingar, elementarfall och sammanfattningsblad i hållfasthetslära, matematik och fysik. *Dock ej sammanfattningar med lösta exempel.*
3. Ordböcker och språklexikon.

Alla medtagna böcker måste vara skrivna på svenska, engelska eller tyska; de får innehålla 'normala' marginalanteckningar (inklusive omskrivningar av ingående formler), men inga lösningar till problemuppgifter.

Lösa anteckningar, varken handskrivna eller tryckta, är inte tillåtna. Undantaget är uppkopierade elementarfall,

4. Miniräknare med tangentbord och sifferfönster i en enhet (periferienheter, såsom t.ex skrivare och bandspelare, tillåts inte).

Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

Lärare

Lars Sonnerup, tel 070 4850689

Lösningar

Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler (2a våningen i södra trappuppgången, nya maskinhuset) måndagen den 21/1.

Betygsättning

En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning, många fel, eller metodfel leder till att uppgiften inte ger något poäng. Normalt görs en helhetsbedömning av skrivningen när poängsätts; en 'snäll' bedömning av en lösning kan kompenseras av en hårdare bedömning på en annan.

Maximal poäng på tentan är 18 och betyg på denna del av kursen ges enligt följande schema:

poäng	betyg	poäng	betyg	poäng	betyg
9	3.0	13	4.0	17	5.0
10	3.3	14	4.3	18	5.3
11	3.5	15	4.5		
12	3.8	16	4.8		

Resultatlista

Anslås på samma ställe som lösningarna senast fredagen den 1/2 2002.

Granskning

Måndag den 4/2 kl. 12.00. Plats meddelas på kursens hemsida samt på rättningslistor (p.g.a. ombyggnation i M-huset)

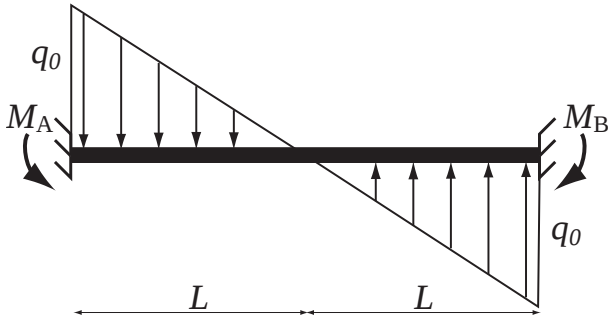
Tänk på:

- Uppgifterna är **inte** ordnade efter svårighetsgrad – välj ut de uppgifter du tycker att du behärskar och börja med dessa.
- Ange varifrån du hämtar de ekvationer som används.
- Om du gör antaganden utöver vad som anges i uppgiftstexten: förklara dessa.
- Bedöm om möjligt rimligheten i dina lösningar. Om du tycker resultatet verkar orimligt, men inte kan hitta några fel i lösningen eller tror att du räknat rätt, så påpeka detta.
- Kontrollera dimensionen i dina svar – en lösning med fel dimension i svaret ger inga poäng.
- Skriv så att den som ska rätta kan läsa (*d v s* skriv tydligt) och ge förklaringar så att beräkningarna går att följa.
- Rita tydliga figurer; det måste framgå vad som är positiva/negativa riktningar på krafter, förskjutningar, etc.

LÖSNINGAR

UPPGIFTER

1. En balk med längden $2L$ och böjstyvheten EI , är fast inspänd i bägge ändar och belastad med en utbredd last enligt *figur 1*. Bestäm stödmomenten M_A och M_B ! (3p)



figur 1 Dubbelsidigt fast inspänd balk belastad med en utbredd, linjärt varierande last.

Lösning 1: Lasten kan beskrivas med ekvationen

$$q(x) = q_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (1)$$

med x -koordinaten definierad från vänster till höger (reservation för teckenkonventioner).

Elastiska linjens ekvation:

$$EI v^{IV} = q = q_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (2)$$

Integrering ger

$$v = \frac{1}{EI} \cdot \quad (3)$$

$$\left(-\frac{q_0 x^5}{120L} + q_0 \frac{x^4}{24} + A \frac{x^3}{6} + B \frac{x^2}{2} + Cx + D \right)$$

Randvillkor:

$$v(0) = v'(0) = v(2L) = v'(2L) = 0 \quad (4)$$

De två första randvillkoren i (4) ger direkt att

$$C = D = 0 \quad (5)$$

i (3).

Resterande två randvillkor i (4) ger

$$A = -\frac{48}{120} q_0 L \quad (6)$$

$$B = \frac{8}{120} q_0 L^2 \quad (7)$$

Böjmomentet ges av

$$M = -EI v'' \quad (8)$$

vilket, med integrationskonstanterna (6) och (7) ger

$$M = \frac{q_0}{30L} (5x^3 - 15x^2 L + 12L^2 x - 2L^3) \quad (9)$$

vilket, med $x = 0$ och $x = 2L$ och moment definierade enligt *figur 1* (omvänt mot vad som anges som positivt moment i Gere–Timoshenko) ger:

$$M_A = -M_B = \frac{q_0 L^2}{15} \quad (10)$$

(Alternativt löses uppgiften med hjälp av elementarfall)

LÖSNINGAR

2. En stång, med längden L , arean A och gjord av ett material med elasticitetsmodulen E och värmeutvidgningskoefficient α , hänger vertikalt med ena änden vilande på änden av en konsol, med längden $2L$ och böjstyvheten EI , enligt *figur 2*. Vid temperaturen T_0 är konsolen helt horisontell.

Den vertikala stången utsätts nu för en temperaturförändring, ΔT . Beräkna ändringsbøjningen av konsolen, δ , p g a denna temperaturlast! Antag små deformationer och försumma inverkan av friktion mellan stång och konsol. (3p)



figur 2 Vertikal stång vilande på en konsol och utsatt för en temperaturhöjning ΔT .

Lösning 2: För konsolen belastad med en punktlast i änden gäller

$$\delta = \frac{8L^3}{3EI} P \Leftrightarrow P = \frac{3\delta EI}{8L^3} \quad (11)$$

Förlängningen av stången under temperaturlast ges av

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad (12)$$

Förlängningen av en stång utsatt för en punktlast i änden ges av

$$\delta_P = \frac{PL}{EA} \quad (13)$$

Den kraft som verkar på stångändan ges av (11). Kombination av (11) och (13) ger

$$\delta_P = \frac{3\delta L EI}{8L^3 EA} = \frac{3\delta I}{8L^2 A} \quad (14)$$

Kompatibiliteten ger att

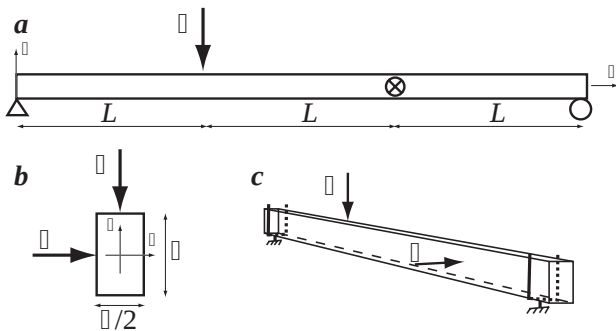
$$\delta = \delta_T - \delta_P \quad (15)$$

vilket, med (12) och (14) ger

$$\delta = \alpha(\Delta T)L - \frac{3\delta I}{8L^2 A} \Leftrightarrow \delta = \frac{8A\alpha(\Delta T)L^3}{8AL^2 + 3I} \quad (16)$$

3. Den fritt upplagda balken i *figur 3a* har ett rektangulärt tvärsnitt enligt *figur 3b*. Den belastas med en vertikal last i sektionen $x = L$ och en horisontell last i sektionen $x = 2L$. Båda lasterna har magnituden P . Beräkna största böjnormalspänningen i balken! (3p)

Notera att stöden ritats som s k gaffelstöd i perspektivritningen. Detta betyder inget annat än att de beter sig som fritt upplagda ("triangel-" och "rull-") stöd i såväl vertikal som horisontell riktning.



figur 3 Fritt upplagd balk belastad med vertikal och horisontell punktlast

Lösning 3: Det inses att det maximala böjmomentet måste finnas i spannet mellan lasterna (eventuellt kan man inse mer än så, se nedan). De stödreaktioner och böjmoment som fås i sektionerna mellan lasterna ges av:

Vertikal last:

$$R_A = \frac{2P}{3}, R_B = \frac{P}{3}, M_y = -\frac{P}{3}(3L - x) \quad (17)$$

Horisontell last:

$$R_A = \frac{P}{3}, R_B = \frac{2P}{3}, M_z = \frac{Px}{3} \quad (18)$$

Yttreghetsmomenten är

$$I_y = \frac{H}{2} \frac{H^3}{12} = \frac{H^4}{24}, I_z = \frac{H}{12} \left(\frac{H}{2}\right)^3 = \frac{H^4}{96} \quad (19)$$

I tvärsektionen fås maximal böjnormalspänning i punkten $y = H/4, z = -H/2$. Denna ges i sektionen mellan lasterna från (17), (18) och (19) som

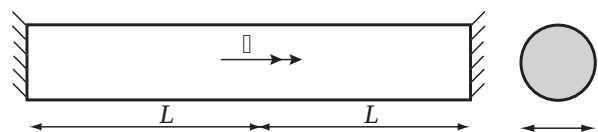
$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Px}{\frac{H^4}{96}} \cdot \frac{H}{4} - \frac{P\left(L - \frac{x}{3}\right)}{\frac{H^4}{24}} \left(-\frac{H}{2}\right) \\ &= \frac{4P}{H^3}(3L + x) \end{aligned}$$

maxvärde i intervallet fås för $x = 2L$ (vilket kanske kan inses direkt). Här är

$$\sigma_{\max} = \frac{20PL}{H^3} \quad (21)$$

4. En axel med solid cirkulär tvärsektion är belastad med ett vridande moment, T , vilket angriper mitt på stängen, se *figur 4*. Bestäm vid vilken magnitud på T stängen börjar plasticera (1p), vid vilken vridvinkel detta inträffar (1p), samt det maximala vridmomentet $T_{\max}$ den genomplasticerade stängen kan ta upp (1p). Stängen är av ett material med skjuvmodul G och skjuvflytgräns τ_y .



figur 4 Solid axel utsatt för vridande moment, T .

Lösning 4: Friläggning ger snittkrafterna

$$M_{vA} = M_{vB} = T/2 \quad (22)$$

Maximal skjuvspänning i tvärsnittet fås av

$$\tau_{\max} = \frac{16M_v}{\pi d^3} = \frac{8T}{\pi d^3} \quad (23)$$

(detta gäller i hela axelns längd).

a) Vid begynnande plasticering är $\tau_{\max} = \tau_y$, vilket, med (23), ger:

$$\tau_y = \frac{8T}{\pi d^3} \Leftrightarrow T = \frac{\pi d^3 \tau_y}{8} \quad (24)$$

b) Vridvinkeln vid begynnande plasticering fås ur

$$\phi = \frac{(T/2)L}{GI_p} = \frac{\pi d^3 \tau_y L \cdot 32}{16 \cdot G \cdot \pi d^4} = \frac{2\tau_y L}{Gd} \quad (25)$$

c) Tvärsnittets maximala vridmomentkapacitet ges av

$$M_{vp} = \frac{2\pi r^3 \tau_y}{3} \quad (26)$$

Kombination av (26) och (22) ger

$$T_{\max} = 2M_{vp} = \frac{\pi d^3 \tau_y}{6} \quad (27)$$

$$\tau_{x\phi} = \frac{Tr}{I_p} = \frac{Td}{2 \cdot \frac{\pi d^3 t}{4}} = \frac{\pi p d^3 \cdot d \cdot 4 \cdot 20}{2 \cdot \pi d^3 \cdot d} \quad (30)$$

$$= 40p$$

av drag

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{P}{\pi dt} = \frac{\pi p d^2 \cdot 20}{\pi d \cdot d} = 20p \quad (31)$$

Här är x -koordinaten i cylinderns längsriktning och ϕ i omkretsriktning.

Detta ger en spänningsmatris enligt

$$\sigma(x, \phi, r) = \begin{bmatrix} 25 & 40 & 0 \\ 40 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot p \quad (32)$$

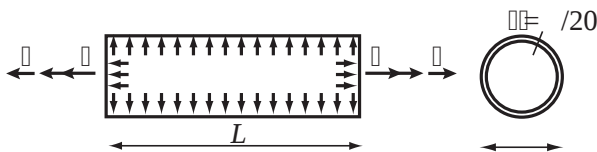
Huvudspänningarna (förutom $\sigma_r = 0$) ges av

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_\phi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_\phi}{2}\right)^2 + \tau_{x\phi}^2} \\ &= \left(\frac{25 + 10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{25 - 10}{2}\right)^2 + 40^2}\right) \cdot p \end{aligned} \quad (33)$$

vilket ger den största huvudspänningen som

$$\sigma_1 = \frac{35 + 5\sqrt{265}}{2} p \approx 58.2p \quad (34)$$

5. Den tunnväggiga, slutna cylindern i figur 5 är utsatt för ett inre övertryck, p , ett vridande moment, $T = \pi p d^3$, samt en dragande axiellkraft $P = \pi p d^2$, se figur 5. Bestäm största huvudspänning i en punkt på ytterytan av cylindern. (3p)



figur 5 Tunnväggig, slutna cylinder belastad med inre övertryck, p , vridande moment, T och axiellkraft, P .

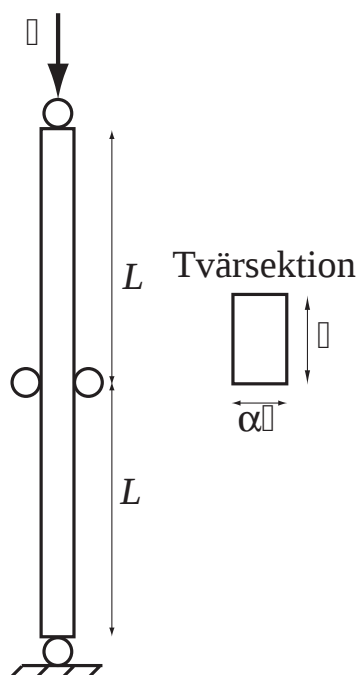
Lösning 5: De spänningar som fås är:
Av tryck

$$\sigma_\phi = \frac{pr}{t} = \frac{pd \cdot 20}{2 \cdot d} = 10p \quad (28)$$

$$\sigma_x = \frac{pr}{2t} = \frac{pd \cdot 20}{2 \cdot 2 \cdot d} = 5p \quad (29)$$

av vridning

6. En pelare är belastad med en vertikal last i toppen och monterad enligt figur 6. Notera att mittstödet enbart förhindrar förskjutning i papperets plan, medan ändstöden stödjer såväl i papperets plan som ut ur planet. Välj proportionerna hos pelarens rektangulära tvärsnitt (d v s bestäm konstanten α), så att hållfastheten för knäckning ut ur papperets plan blir lika stor som för knäckning i papperets plan. (3p)



figur 6 Pelare med rektangulär tvärsektion belastad med tryckande axialkraft, P .

Lösning 6: Kritisk last för knäckning ut ur planet:

$$P_{cr}^u = \frac{\pi^2 EI_u}{(2L)^2} = \frac{\pi^2 EI_u}{4L^2} \quad (35)$$

Kritisk last för knäckning i planet

$$P_{cr}^i = \frac{\pi^2 EI_i}{L^2} \quad (36)$$

Sätt dessa kritiska laster lika stora

$$P_{cr}^i = P_{cr}^u \Leftrightarrow \frac{\pi^2 EI_i}{L^2} = \frac{\pi^2 EI_u}{4L^2} \Leftrightarrow I_i = \frac{I_u}{4} \quad (37)$$

Vi har yttröghetsmomenten som

$$I_i = \frac{(\alpha h)^3 h}{12} = \frac{\alpha^3 h^4}{12}, I_u = \frac{\alpha h h^3}{12} = \frac{\alpha h^4}{12} \quad (38)$$

Kombination av (37) och (38) ger

$$\frac{\alpha^3 h^4}{12} = \frac{\alpha h^4}{4 \cdot 12} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \quad (39)$$

LÖSNINGAR