

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR I2 – MHA 051

6 april 2002

08.45 – 13.45 (5 timmar)

Lärare: Anders Ekberg, tel 772 3480

Maximal poäng är 15. För godkänt krävs 6 poäng.

ALLMÄNT

Hjälpmedel

1. Läroböcker i hållfasthetslära och mekanik.
2. Handböcker, formelsamlingar, elementarfall och sammanfattningsblad i hållfasthetslära, matematik och fysik. **Dock ej sammanfattningar med lösta exempel eller OH-kopior från de avslutande föreläsningarna om avancerad hållfasthetslära.**
3. Ordböcker och språklexikon.

Alla medtagna böcker måste vara skrivna på svenska, engelska eller tyska; de får innehålla 'normala' marginalanteckningar (inklusive omskrivningar av ingående formler), men inga lösningar till problemuppgifter.

Lösa anteckningar, varken handskrivna eller tryckta, är inte tillåtna. Undantaget är uppkopierade elementarfall,

4. Miniräknare med tangentbord och sifferfönster i en enhet (periferienheter, såsom t.ex skrivare och bandspelare, tillåts inte).

Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

Lärare

Anders Ekberg, tel 772 3480

Lösningar

Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler (2a våningen i södra trappuppgången, nya maskinhuset) senast måndagen den 8/4. Dessutom läggs de ut på kursens hemsida.

Betygsättning

En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning, många fel, eller metodfel leder till att uppgiften inte ger något poäng. Normalt görs en helhetsbedömning när skrivningen poängsätts; en 'snäll' bedömning av en lösning kan kompenseras av en hårdare bedömning på en annan.

Maximal poäng på tentan är 15 och betygsgränserna är enligt följande:

- 6-8 poäng ger betyg 3
- 9-11 poäng ger betyg 4
- 12-15 poäng ger betyg 5

Resultatlista

Anslås på samma ställe som lösningarna senast fredagen den 26/4, 2002.

Granskning

Måndag den 29/4 kl. 12.00. Plats meddelas på kursens hemsida samt på rättningslistor (p.g.a. ombyggnad i institutionens lokaler)

Tänk på:

- Uppgifterna är **inte** ordnade efter svårighetsgrad – välj ut de uppgifter du tycker att du behärskar och börja med dessa.
- Ange varifrån du hämtar de ekvationer som används.
- Om du gör antaganden utöver vad som anges i uppgiftstexten: förklara dessa.
- Bedöm om möjligt rimligheten i dina lösningar. Om du tycker resultatet verkar orimligt, men inte kan hitta några fel i lösningen eller tror att du räknat rätt, så påpeka detta.
- Kontrollera dimensionen i dina svar – en lösning med fel dimension i svaret ger normalt inga poäng.
- Skriv så att den som ska rätta kan läsa (*d v s skriv tydligt*) och ge förklaringar så att beräkningarna går att följa.
- Rita tydliga figurer; det måste framgå vad som är positiva/negativa riktningar på krafter, förskjutningar, etc.

Om du inte gjort det innan, **füll i kursenkäten!** Den finns på kursens hemsida:

www.solid.chalmers.se/anek/teaching/i2/

LÖSNINGAR

UPPGIFTER

1. En struktur består av en konsol, A-B och en pelare B-C enligt figur 1. En last, P angriper i punkten B. När belastningen ökar sluts det lilla gapet $\delta = L/10$ mellan konsolen och pelaren. När belastningen P ökas ytterligare knäcks pelaren B-C.

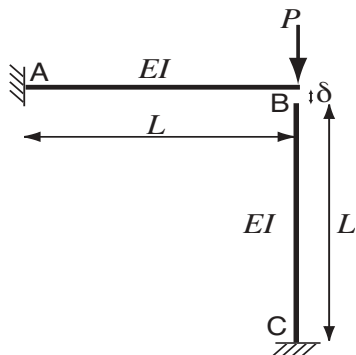
Din uppgift är att beräkna övre och undre gräns för kraften P då pelaren B-C knäcks!

Uttryck svaret i givna storheter. (3p)

Ledning:

Försumma inverkan av konsolens och pelarens vikt, samt axialdeformationer i pelaren före knäckning!

Knäcklasten varierar beroende av vilken friktion som finns mellan pelare och konsol i punkten B.



figur 1 Kontrollutrustning bestående av en konsol (med applicerad punktlast), samt en pelare.

Lösning 1: Elementarfall 3 ger nedböjningen av konsoländen som

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \Leftrightarrow P = \frac{3\delta EI}{L^3} \quad (1)$$

Knäckning som Euler 1 vid friktionsfri kontakt vid den kritiska lasten

$$P_{E1} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (2)$$

vilket ger den kritiska lasten för strukturen som

$$P_{kr} = \frac{EI}{L^2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{3\delta}{L} \right) \quad (3)$$

Vid oänlig friktion fås Euler 3, med den kritiska lasten

$$P_{E3} = \frac{2.05 \cdot \pi^2 EI}{L^2} \quad (4)$$

vilket ger kritisk last för strukturen som

$$P_{kr} = \frac{EI}{L^2} \cdot \left(2.05 \cdot \pi^2 + \frac{3\delta}{L} \right) \quad (5)$$

Sätt nu $\delta = L/10$ och uttryck intervallet för den kritiska lasten

$$\frac{EI}{L^2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{3}{10} \right) \leq P_{kr} \leq \frac{EI}{L^2} \cdot \left(2.05 \cdot \pi^2 + \frac{3}{10} \right) \quad (6)$$

eller

$$2.77 \leq \frac{P_{kr} \cdot L^2}{EI} \leq 20.53 \quad (7)$$

2. Ett material har en flytgräns vid enaxligt drag som är 100 MPa.

a) Materialet belastas nu i ren vridning. Vid vilken skjuvspänning, $\tau = \tau_{flyt}$ kan man förvänta sig att materialet plasticerar enligt von Mises kriterium? (1p)

b) Materialet belastas nu även med en hydrostatisk spänning, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 30$ MPa, utöver skjuvspänningen från vridningen.

Vid vilket τ kan man förvänta sig att materialet plasticerar enligt Trescas kriterium? (2p)

Lösning 2: a) Vid enaxligt drag med $\sigma = \sigma_s$ fås effektivspänningarna enligt von Mises och Tresca som

$$\sigma_{evM} = \sigma_{eTr} = \sigma_s \quad (8)$$

Vid ren vridning fås spänningstensorn

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

(här är koordinatsystemet cylindriskt och τ svarar mot omkretsled, men det spelar ingen roll för fortsättningen).

von Mises effektivspänning vid ren vridning är

$$\sigma_{evM} = \sqrt{3}\tau \quad (10)$$

Plasticitet fås då denna uppgår till den effektiva flytspänningen, d.v.s.

$$\sqrt{3}\tau = \sigma_s \Leftrightarrow \tau = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \quad (11)$$

d.v.s. $\tau = 58$ MPa.

b) Dela upp spänningstensorn i två delar (en deviatorisk och en volymetrisk om man skall vara noggrann)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij, \text{dev}} + \sigma_{ij, \text{vol}} \quad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

För den volymetriska delen blir effektivspänningen $\sigma_{eTr} = 0$ och för den deviatoriska delen blir den (beräkna t.ex. huvudspänningarna m.h.a. Mohr's spänningscirkel):

$$\sigma_{eTr} = \tau - (-\tau) = 2\tau \quad (13)$$

vilket ger plasticering då

$$2\tau = \sigma_s \Leftrightarrow \tau = \sigma_s/2 \quad (14)$$

d.v.s. $\tau = 50 \text{ MPa}$.

(Naturligtvis kan man även lösa detta genom att sätta upp spänningstensorn och beräkna huvudspänningar och Trescaspänning, men det är mycket knöligare.)

3. En drivaxel har dimensioner enligt figur 2.

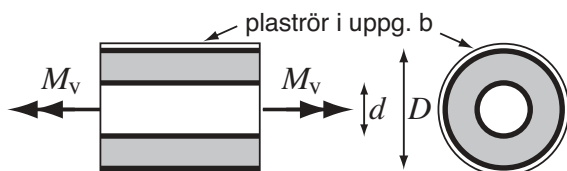
Axeln roterar 500 varv per minut. Axeln är gjord av stål ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$).

a) Hur stor effekt P [W] kan överföras av axeln om tillåten skjuvspänning är 150 MPa och tillåten förvriddningsvinkel per längdenhet är $\varphi/L = 0.05$ [rad/m]? (1p)

b) Ett plaströr ($E = 25 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) med en tjocklek av 2 mm sätts nu utanpå stålrottet (fullständigt fixerat till stålrottet). Vilken effekt, P , kan nu tillåtas om maximal tillåten förvriddningsvinkel per längdenhet fortsatt är $\varphi/L = 0.05$ [rad/m]? (2p)

Observera!

Antag lineärt elastiskt material och notera att det här inte ges något krav på spänningsnivån.



figur 2 Drivaxel i längs- och tvär-sektion. Dimensioner är $D = 40 \text{ mm}$ och $d = 20 \text{ mm}$. Axeln är belastad med ett vridande moment p.g.a. drivningen.

Lösning 3: a) Ur läroboken fås maximal skjuvspänning som

$$\tau_{\max} = \frac{2M_v(D/2)}{\pi\left(\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right)} \quad (15)$$

Detta ger vridmomentet som

$$M_v = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \tau_{\max} \quad (16)$$

med numeriska värden fås

$$M_{v, \max} = \frac{\pi(0.04^4 - 0.02^4)}{16 \cdot 0.04} \cdot 150 \times 10^6 \quad (17)$$

d.v.s. $M_{v, \max} = 1.77 \text{ kNm}$.

Förvriddningsvinkel per längdenhet fås som

$$\frac{\varphi}{L} = \frac{2M_v}{G\pi\left(\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4\right)} \quad (18)$$

Detta ger vridmomentet som

$$M_v = \frac{\varphi}{L} \cdot \frac{E\pi(D^4 - d^4)}{2(1 + \nu) \cdot 32} \quad (19)$$

och med numeriska värden

$$M_{v, \max} = 0.05 \cdot \frac{210 \times 10^9 \pi(0.04^4 - 0.02^4)}{2(1 + 0.3) \cdot 32} \quad (20)$$

d.v.s. $M_{v, \max} = 0.95 \text{ kNm}$.

Förvriddningsvinkeln är alltså dimensionerande och maximal effekt fås som

$$P_{\max} = M_{v, \max} \left(\frac{2\pi n}{60} \right) = 0.95 \left(\frac{2\pi \cdot 500}{60} \right) \quad (21)$$

d.v.s. $P_{\max} = 49.8 \text{ kW}$.

b) Strukturen är nu statiskt obestämd. Vi vet dock att det sammansatta rötet vrids $\varphi/L = 0.05$ [rad/m]. Enligt a-uppgiften vet vi att stålrottet då tar upp vridmomentet $M_{v, \max} = 0.95 \text{ kNm}$.

Det vridande moment som plaströtet tar upp ges av ekvationen för förvriddningsvinkeln hos ett tunnväggigt rör:

$$\frac{\varphi}{L} = \frac{M_v}{2G\pi\left(\frac{D}{2} + \frac{t}{2}\right)^3 t} \quad (22)$$

vilket ger

$$M_v = \frac{\varphi}{L} \cdot \frac{2G\pi(D+t)^3 t}{8} \quad (23)$$

och med insatta värden

$$M_v = 0.05 \cdot \frac{2 \cdot 25 \times 10^9 \pi (0.042)^3 \cdot 0.002}{8 \cdot 2(1+0.3)} \quad (24)$$

vilket ger $M_v = 56 \text{ Nm}$

Totala vridande momentet blir då

$$M_{v, \text{tot}} = 952 + 56 = 1.01 \text{ kNm} \quad (25)$$

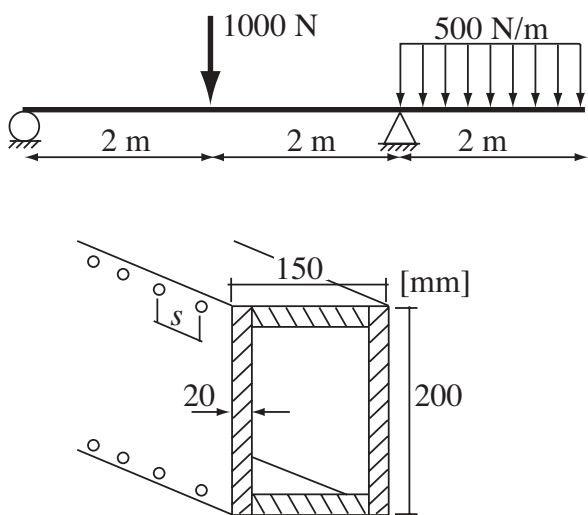
vilket motsvarar en effekt av

$$P_{\text{max}} = M_{v, \text{tot}} \left(\frac{2\pi n}{60} \right) = 1.01 \left(\frac{2\pi \cdot 500}{60} \right) \quad (26)$$

vilket är $P_{\text{max}} = 52.9 \text{ kW}$ (en ökning med ca 6%)

4. En träbalk med tvärsnitt och belastning enligt figur 3 är uppbyggd av 20 mm tjocka brädor sammanfogade med spikar. Spikarna har en diameter av $d = 5 \text{ mm}$. De är satta med ett centrumavstånd s .

Bestäm det maximala centrumavståndet, s , om medelskjuvspänningen (över spiktvärsnittet) ej får överstiga $\tau_{\text{till}} = 20 \text{ MPa}$ i någon sektion av balken! (3p)



figur 3 Belastad träbalk och tvärsektion.

Lösning 4: Statiskt bestämd struktur; frilägg och beräkna stödreaktionerna. Momentjämvikt runt vänstra stödet ger

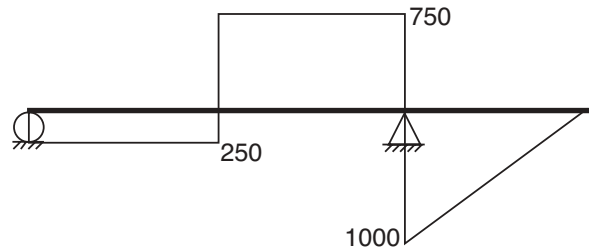
$$1000 \cdot 2 - R_B \cdot 4 + 500 \cdot 2 \cdot 5 = 0 \quad (27)$$

vilket ger $R_B = 1750 \text{ N}$.

Vertikal jämvikt ger

$$R_A = 1000 + 1000 - 1750 = 250 \text{ N} \quad (28)$$

Detta ger ett tvärkraftsdiagram enligt:



Maximala tvärkraften blir alltså $|T|_{\text{max}} = 1000 \text{ N}$. (Vi kan naturligtvis räkna ut böjmoment också, men dessa behövs ej).

Sektionskonstanterna fås enligt:

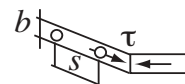
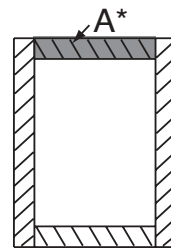
$$I = \frac{0.2^3 \cdot 0.15}{12} - \frac{0.16^3 \cdot 0.11}{12} = 6.25 \times 10^{-5} \quad (29)$$

(rektangulärt tvärsnitt med centrerat rektangulärt

hål)

$$S_{A^*} = 0.02 \cdot 0.11 \cdot (0.1 - 0.01) = 1.98 \times 10^{-4} \quad (30)$$

Där detta statiska moment gäller för arean A^* nedan:



Skjuvspänning i spikförbandet

Skjuvspänningen fås som

$$\tau = \frac{S_{A^*} T}{Ib} \cdot \frac{1}{2} \quad (31)$$

där $1/2$ kommer av att vi har två snitt (alternativt snittar man från mitten där skjuvspänningen är noll p.g.a. symmetri och får ett snitt och halva arean).

Tvärkraften som verkar på varje spik blir (se figur)

$$F_{\text{spik}} = \tau b s = \frac{S_{A^*} T}{2I} \cdot s \quad (32)$$

Medelskjuvspänningen i spiken blir

$$\tau_{\text{spik, med}} = \frac{F_{\text{spik}}}{A_{\text{spik}}} = \frac{S_{A^*} T}{2Ib} \cdot \frac{s}{\pi r_{\text{spik}}^2} \quad (33)$$

Sätt $\tau_{\text{spik, med}} = \tau_{\text{till}}$ och lös ut s

$$s_{\text{till}} = \frac{2 \cdot I \cdot \tau_{\text{till}}}{S_{A^*} T} \cdot \pi r_{\text{spik}}^2 \quad (34)$$

vilket med numeriska värden ger

$$s_{\text{till}} = \frac{2 \cdot 20 \times 10^6 \cdot 6.25 \times 10^{-5}}{1.98 \times 10^{-4} \cdot 1000} \cdot \pi \cdot 0.0025^2 \quad (35)$$

och $s_{\text{till}} = 0.25 \text{ m}$.

5. a) Ge en hållfasthetsmässig motivering till varför man bör sträva efter att bygga bilar så att deformationerna i motorutrymmet blir så stora som möjligt vid en frontalkrock! (1p)
(Naturligtvis bör däremot deformationerna i passagerarutrymmena vara minimala.)
b) Betrakta ett elastiskt-idealplastiskt material med flytgräns σ_s som innehåller en (ideal) spricka. En last appliceras så att sprickan belastas i mod I. Vad är spänningen precis vid sprickspetsen? Motivera! (1p)
c) Betrakta en struktur med en viss egenfrekvens. Beskriv två sätt att sänka egenfrekvensen hos strukturen? (1p)

Lösning 5: a) Den energi som absorberas är proportionell mot deformationen hos materialet. Ju mer energi som kan absorberas i strukturen, desto mindre energi påverkar föraren. Med andra ord: bilen tar smällen och föraren klarar sig.

b) Spänningen blir σ_s . Detta beror på att för idealelastiska material blir spänningen vid (den ideala) sprickspetsen oändlig. Detta är teoretiskt fallet även vid oändligt låga lastnivåer. I ett elastiskt-idealplastiskt material kan dock inte spänningen bli högre än flytgränsen, d.v.s. σ_s . (På grund av detta måste materialet längre bort från sprickan ta en del av den spänning som materialet alldeles vid sprickspetsen inte längre tar. Man kallar detta för att man får spänningsomlagringar.)

c) Minska flexibiliteten (inklusive ta bort stöd) eller öka massan. (Normalt sänks då egenfrekvensen, men i undantagsfall kan det hända att det inte påverkar egenfrekvensen alls. I praktiken är man dock oftare intresserad av att höja egenfrekvenserna. I sådant fall gör man tvärt om.)

LÖSNINGAR