

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR I2 – MHA 051

31 augusti 2002
14.15 – 19.15 (5 timmar)

Lärare: Anders Ekberg, tel 772 3480

Maximal poäng är 15. För godkänt krävs 6 poäng.

ALLMÄNT

Hjälpmedel

1. Läroböcker i hållfasthetslära och mekanik.
2. Handböcker, formelsamlingar, elementarfall och sammanfattningsblad i hållfasthetslära, matematik och fysik. **Dock ej sammanfattningar med lösta exempel eller OH-kopior från de avslutande föreläsningarna om avancerad hållfasthetslära.**
3. Ordböcker och språklexikon.

Alla medtagna böcker måste vara skrivna på svenska, engelska eller tyska; de får innehålla 'normala' marginalanteckningar (inklusive omskrivningar av ingående formler), men inga lösningar till problemuppgifter.

- Lösa anteckningar, varken handskrivna eller tryckta, är inte tillåtna. Undantaget är uppkopierade elementarfall,
4. Miniräknare med tangentbord och sifferfönster i en enhet (periferienheter, såsom t.ex skrivare och bandspelare, tillåts inte).

Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

Lärare

Anders Ekberg, tel 772 3480

Betygsättning

En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning, många fel, eller metodfel leder till att uppgiften inte ger något poäng. Normalt görs en helhetsbedömning när skrivningen poängsätts; en 'snäll' bedömning av en lösning kan kompenseras av en hårdare bedömning på en annan.

Maximal poäng på tentan är 15 och betygsgränserna är enligt följande:

- 6-8 poäng ger betyg 3
- 9-11 poäng ger betyg 4
- 12-15 poäng ger betyg 5

Lösningar

Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler (2a våningen i södra trappuppgången, nya maskinhuset) senast måndagen den 2/9. Dessutom läggs de ut på kursens hemsida:
www.solid.chalmers.se/anek/teaching/i2.

Resultatlista

Anslås på samma ställe som lösningarna senast fredagen den 6/9, 2002.

Granskning

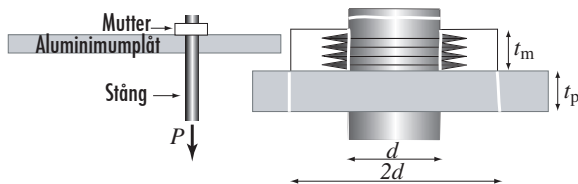
Fredag den 6/9, 2002 kl. 11.30–13.00 på Anders Ekbergs kontor, i Teknisk Mekaniks lokaler, nya M.huset, norra trapphuset, 3:e våningen.

Tänk på:

- Uppgifterna är **inte** ordnade efter svårighetsgrad – välj ut de uppgifter du tycker att du behärskar och börja med dessa.
- Ange varifrån du hämtar de ekvationer som används.
- Om du gör antaganden utöver vad som anges i uppgiftstexten: förklara dessa.
- Bedöm om möjligt rimligheten i dina lösningar. Om du tycker resultatet verkar orimligt, men inte kan hitta några fel i lösningen eller tror att du räknat rätt, så påpeka detta.
- Kontrollera dimensionen i dina svar – en lösning med fel dimension i svaret ger normalt inga poäng.
- Skriv så att den som ska rätta kan läsa (*d* v s skriv tydligt) och ge förklaringar så att beräkningarna går att följa.
- Rita tydliga figurer; det måste framgå vad som är positiva/negativa riktningar på krafter, förskjutningar, etc.

UPPGIFTER

1. En järnstång med tvärsnittsarean A är belastad med en dragande last och fäst vid en aluminiumplåt med en mutter av samma material som järnstången, enligt *figur 1*. Båda materialen kan antas vara elastiska-idealplastiska. Järnstången har flytgränsen i drag $\sigma_y = 300$ MPa och i skjuvning $\tau_y = 150$ MPa. Aluminiumbalken har en flytgräns i drag $\sigma_y = 200$ MPa och i skjuvning $\tau_y = 100$ MPa. Tre tänkbara brottsnitt skall analyseras. Dessa är markerade i *figur 1* med vita linjer. Bestäm muttertjocklek, t_m och plåttjocklek, t_p , så att hållfastheten i de tre brottsnitten blir lika stor! Övriga dimensioner framgår av figuren. (3p)



figur 1 Stång fäst i aluminiumplåt med mutter och belastad med dragande last.

Lösning 1: Plasticering av stången fås då:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2} = 300 \text{ MPa} \quad (1)$$

vilket ger

$$P = \frac{300\pi d^2}{4} = 75\pi d^2 \quad (2)$$

För muttern fås plasticitet då

$$P = \tau_y \cdot \pi d \cdot t_m \quad (3)$$

med $\tau_y = 150$ MPa fås

$$P = 150\pi \cdot d \cdot t_m \quad (4)$$

samma brottlast ger

$$150\pi \cdot d \cdot t_m = 75\pi d^2 \quad (5)$$

vilket ger

$$t_m = d/2 \quad (6)$$

För aluminiumplåten fås slutligen plasticitet då

$$P = \tau_y \cdot \pi \cdot 2d \cdot t_p \quad (7)$$

med $\tau_y = 100$ MPa fås

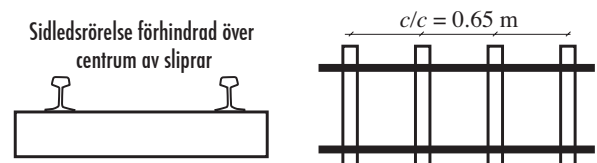
$$P = 100 \cdot 2\pi \cdot d \cdot t_p \quad (8)$$

samma brottlast ger

$$200\pi \cdot d \cdot t_p = 75\pi d^2 \Leftrightarrow t_p = \frac{3 \cdot d}{8} \quad (9)$$

I praktiken är det lite mer komplicerat p.g.a. spänningskoncentrationer i gängningen, m.m., men detta kan försummas i en ingenjörsanalys. Dessutom kan man notera att de olika haverityperna kräver olika upplagsförutsättningar för att komma på fråga (som en övning kan du fundera på vilka).

2. Ett skarvspår är byggt av BV50-räl i 50 meters sektioner placerad på sliprar med centrumavståndet $c = 0.65$ m. BV50 räl har en vikt av 50 kg/m, en tvärsnittsarea av $A = 6.37 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ och ett yttröghetsmoment av $I_y = 3.37 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ i den vekaste riktningen (d.v.s. i lateralled). Temperaturutvidgningskoefficienten för stålet i rälsen är $\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ och E-modulen $E = 210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. Antag nu att glappet mellan rälssektionerna är stängt (d.v.s. sektionen är förhindrad att expandera i längsled) vid en temperatur av 25°C .
- a) Beräkna den resulterande kraft som varje grads temperaturhöjning ger i rälsen! (1p)
- b) Vid vilken temperatur kommer rälsen att knäcka om man antar att sliprarna är förhindrade att röra sig i sidled och att befästningen (fästet mellan räls och sliper) är oeftergivligt i sidled? (2p)
- c) Baserat på svaret i uppgift b, är den antagna knäckningsmoden rimlig? Om inte, skissa en troligare knäckmod! (1p)



figur 2 Tvärsnitt och vy ovanifrån av en del av en spårsektion.

Lösning 2:

a) Spänningen p.g.a. en temperaturhöjning är:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (10)$$

per grad fås (med givna värden):

$$\sigma = E \cdot \alpha = 210 \times 10^9 \cdot 11 \times 10^{-6} = 2.31 \text{ MPa} \quad (11)$$

Kraften blir

$$P = \sigma \cdot A = 2.31 \times 10^6 \cdot 6.37 \times 10^{-3} = 14.7 \text{ kN} \quad (12)$$

b) Knäckmoden blir, med förhindrad sidförskjutning över sliprar, ett antal Euler 2:or, enligt figuren nedan:



Knäcklasten för denna mod är:

$$P_{E2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \times 10^9 \cdot 3.37 \times 10^{-6}}{0.65^2} \quad (13)$$

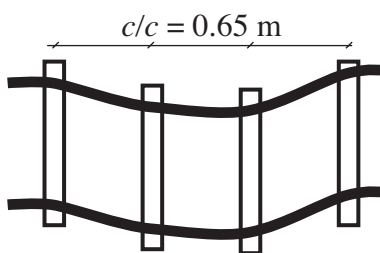
$$= 16.5 \text{ MN}$$

Detta motsvarar en temperaturhöjning på

$$\Delta T = \frac{16.5 \times 10^6}{14.7 \times 10^3} = 1125 \text{ }^\circ\text{C} \quad (14)$$

d.v.s. en temperatur på 1150 °C!

c) Denna temperaturhöjning kommer aldrig att uppkomma. Det måste alltså vara fel på någon förutsättning. Detta fel är antagandet om att ingen sidoförskjutning sker. I praktiken sker knäckningen via en sidoförskjutning av sliprarna, enligt figur nedan. Detta ger en ökad knäcklängd. Är sidoförskjutningen förhindrad (t.ex. via en tillräcklig ballastskuldra utanför spåret) så bildas inga solkurvor.



3. Två brädor läggs, utan att på något sätt sammanfogas, ovanpå varandra. De belastas sedan med en punktlast, se figur 3.

a) – Skissa normalspänningsfördelningen i tvärsnittet under punktlasten (det skall framgå vad som är drag och tryck)!

– Vilken är den största normalspänning som uppstår i brädorna? (1p)

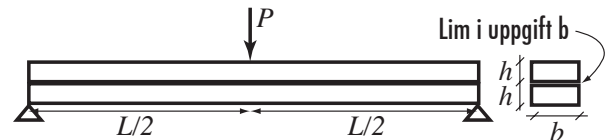
b) Brädorna limmas nu ihop.

– Skissa spänningsfördelningen i brädorna.

– Vilken är den största normalspänning som uppstår i brädorna?

– Vilken skjuvspänningshållfasthet måste limmet ha? (1p)

c) Hur många lösa brädor (enligt uppgift a) måste läggas på varandra för att balkens största nedböjning skall bli mindre än den för den limmade brädan i uppgift b? (1p)



figur 3 Fritt upplagd balk uppbyggd av två brädor belastad med punktlast.

Lösning 3:

a) För två icke samverkande brädor, är yttröghetsmomentet (vid vertikalböjning):

$$I = 2 \cdot \frac{bh^3}{12} \quad (15)$$

Maximala böjmomentet är

$$M_{\max} = \frac{P \cdot L}{4} \quad (16)$$

och den maximala spänningen blir

$$\sigma_{\max} = \frac{(P \cdot L)/4}{2 \cdot (bh^3)/12} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{PL}{bh^2} \quad (17)$$

Med en spänningsfördelning enligt vänstra bilden nedan.

b) För två samverkande brädor, är yttröghetsmomentet (vid vertikalböjning):

$$I = \frac{b(2 \cdot h)^3}{12} = \frac{2}{3} \cdot bh^3 \quad (18)$$

och den maximala spänningen blir

$$\sigma_{\max} = \frac{(P \cdot L)/4}{2 \cdot (bh^3)/3} \cdot h = \frac{3}{8} \cdot \frac{PL}{bh^2} \quad (19)$$

Med en spänningsfördelning enligt högra bilden nedan.

Skjuvspänningen i snittet mellan brädorna är

$$\tau = \frac{ST}{Ib} = \frac{(bh \cdot h/2) \cdot P/2}{((2bh^3)/3) \cdot b} = \frac{3P}{8bh} \quad (20)$$

vilket är den skjuvhållfasthet limmet minst måste ha för att samverkan skall råda.



c) Max nedböjning är:

$$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{48 \cdot EI} \quad (21)$$

m.a.o. måste yttröghetsmomenten vara desamma för att nedböjningen skall vara densamma, vilket ger

$$n \cdot \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3} \cdot bh^3 \Leftrightarrow n = \frac{24}{3} = 8 \quad (22)$$

Alltså måste man lägga minst 8 brädor på varandra för att få samma nedböjning.

4. En balk med längden L och böjstyvheten EI , är upplagd enligt figur 4. En punktlast appliceras mitt i det högra spannet (punkt C).

a) Beräkna stödreaktionerna i A, B och D i figur 4! (2p)

b) Beräkna snittmomentet över mittstödet (punkt B i figur 4)! (1p)



figur 4 Balk belastad med punktlast.

Lösning 3:

a) Inför reaktionskrafterna vid B och D (R_B och R_D) som statiskt övertaliga (positiv riktning nedåt). Elementarfall för en konsol ger nedböjningarna vid B och D som:

$$\delta_B = \frac{7PL^3}{96EI} + \frac{R_B L^3}{24EI} + \frac{5R_D L^3}{48EI} \quad (23)$$

$$\delta_D = \frac{27PL^3}{128EI} + \frac{5R_B L^3}{48EI} + \frac{R_D L^3}{3EI} \quad (24)$$

sätts dessa till noll, fås

$$R_B = -\frac{43P}{56} \text{ och } R_D = -\frac{11P}{28} \quad (25)$$

Vertikal jämvikt ger

$$R_A = -\left(P - \frac{43P}{56} - \frac{11P}{28}\right) = \frac{9}{56}P \quad (26)$$

och momentjämvikt ger

$$M_A = \frac{3P}{4L} - \frac{43P}{56} \cdot \frac{L}{2} - \frac{11P}{28} \cdot L = -\frac{3}{112}PL$$

(dragen överkant)

b) Stödmomentet vid B fås som:

$$M_B = \frac{PL}{4} - \frac{11PL}{56} = \frac{3}{56}PL \quad (27)$$

(dragen överkant)

5. a) För att förhindra ytterligare tillväxt av utmattningssprickor i t.ex. stålbroar så tillämpas ibland stoppborring. Det går till så att man borrar ett (runt) hål vid sprickspetsen. Sprickan växer då inte vidare. Förklara, från en hållfasthetsmässig synvinkel, hur denna metod kan fungera (1p)

b) Inom finita elementmetoden, vad innebär begreppen *element* och *nod*, samt *bandad matris* (1p)

Lösning 5:

a) Framför sprickan finns en (teoretisk) maximalspänning som är oändlig. Framför hålet finns en teoretisk maxspänning som är tre gånger den nominella. Stoppborring leder alltså till en spänningsminskning. (I praktiken är det mer komplicerat eftersom plasticitet leder till att även hålradien kommer att inverka.

b) En modell av en komponent delas in i ett antal element, som, vart och ett, motsvarar en del av den (fysiska) komponenten. Dessa förbinds med noder.

En bandad matris innebär att många av matrisens element är noll och att de element som är skilda från noll ligger samlade runt matrisens diagonal.