

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR I2 – MHA 051

26 april 2003

8.45 – 12.45 (4 timmar)

Lärare: Elena Kabo, tel: 772 3825

Maximal poäng är 15. För godkänt krävs 6 poäng.

ALLMÄNT

Hjälpmedel

1. Läroböcker i hållfasthetslära och mekanik.
2. Handböcker, formelsamlingar, elementarfall och sammanfattningsblad i hållfasthetslära, matematik och fysik. *Dock ej sammanfattningar med lösta exempel.*
3. Ordböcker och språklexikon.
 - Alla medtagna böcker måste vara skrivna på svenska, engelska eller tyska; de får innehålla 'normala' marginalanteckningar (inklusive omskrivningar av ingående formler), men inga lösningar till problemuppgifter.
 - Lösa anteckningar, varken handskrivna eller tryckta, är inte tillåtna. Undantaget är uppkopierade elementarfall,
4. Miniräknare med tangentbord och sifferfönster i en enhet (periferienheter, såsom t.ex skrivare och bandspelare, tillåts inte).

Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

Lärare

Elena Kabo, tel 031 772 3825

Betygsättning

En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning, många fel, eller metodfel leder till att uppgiften inte ger något poäng. Normalt görs en helhetsbedömning av skrivningen när poängsätts; en 'snäll' bedömning av en lösning kan kompenseras av en hårdare bedömning på en annan.

Maximal poäng på tentan är 15 och betygsgränserna är enligt följande:

- 6-8 poäng ger betyg 3
- 9-11 poäng ger betyg 4
- 12-15 poäng ger betyg 5

Lösningar

Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler (2a våningen i **södra** trapphuset, nya maskinhuset), samt på internet: www.am.chalmers.se/~anek/teaching/k4/, måndagen den 28/4.

Resultatlista

Anslås på samma ställe som lösningarna senast tisdag den 13/5, 2003.

Granskning

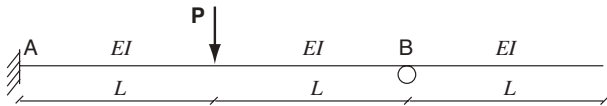
Tisdag den 13/5, 2003 kl. 12.00–13.00 på Anders Ekbergs kontor, i Teknisk Mekaniks lokaler, nya M.huset, **norra** trapphuset, 3:e våningen.

Tänk på:

- Uppgifterna är **inte** ordnade efter svårighetsgrad – välj ut de uppgifter du tycker att du behärskar och börja med dessa.
- Ange varifrån du hämtar de ekvationer som används.
- Om du gör antaganden utöver vad som anges i uppgiftstexten: förklara dessa.
- Bedöm om möjligt rimligheten i dina lösningar. Om du tycker resultatet verkar orimligt, men inte kan hitta några fel i lösningen eller tror att du räknat rätt, så påpeka detta.
- Kontrollera dimensionen i dina svar – en lösning med fel dimension i svaret ger normalt inga poäng.
- Skriv så att den som ska rätta kan läsa (*d v s* skriv tydligt) och ge förklaringar så att beräkningarna går att följa även för förvirrade lärare.
- Rita tydliga figurer; det måste framgå vad som är positiva/negativa riktningar på krafter, förskjutningar, etc.

UPPGIFTER

1. Bestäm samtliga stödreaktioner i A för balken i figur 1! (3p)



figur 1 Balk, med styvhet EI , belastad med punktlasten P .

Lösning 1:

Statiskt obestämt. Inför stödreaktionen i B, V_B , som statiskt övertalig.

Att $H_A = 0$ inses.

Elementarfall ger nedböjningen i B som

$$\delta_B = P \cdot \frac{L^2 \cdot 2L}{2EI} \left(1 - \frac{L}{6L}\right) - V_B \cdot \frac{(2L)^3}{3EI} \quad (1)$$

Det geometriska villkoret är $\delta_B = 0$.

$$P \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) - V_B \cdot \frac{8}{3} = 0 \quad (2)$$

vilket ger

$$V_B = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} P = \frac{5}{16} P \quad (3)$$

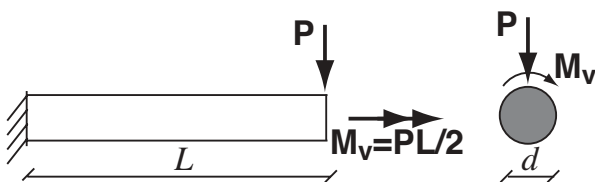
Vertikal jämvikt ger

$$V_A = P - \frac{5}{16} P = \frac{11}{16} P \quad (4)$$

och momentjämvikt runt A ger

$$M_A = P \cdot L - \frac{5}{16} P \cdot 2L = \frac{3}{8} PL \quad (5)$$

2. Bestäm P då plasticitet uppkommer enligt von Mises flytkriterium för balken i figur 2! (3p)
Balken har ett solitt, cirkulärt tvärsnitt och materialets flytgräns är $\sigma = \sigma_s$



figur 2 Cirkulär balk utsatt för en böjande punktlast och ett vridande moment.

Lösning 2:

Längst upp (och nere) vid inspänningen är påkänningen störst. Här är normalspänningen av böjningen:

$$\sigma = \frac{PL}{\pi d^4} \cdot \frac{d}{2} = \frac{32PL}{\pi d^3} \quad (6)$$

och skjuvspänningen av vridningen:

$$\tau = \frac{2 \cdot \frac{PL}{2} \cdot \frac{d}{2}}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4} = \frac{8PL}{\pi d^3} \quad (7)$$

von Mises effektivspänning ges, i detta fall, av

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{32PL}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{8PL}{\pi d^3}\right)^2} \quad (8)$$

vilket kan förenklas till

$$\sigma_e = \frac{PL}{\pi d^3} \sqrt{1024 + 3 \cdot 64} = 34.87 \cdot \frac{PL}{\pi d^3} \quad (9)$$

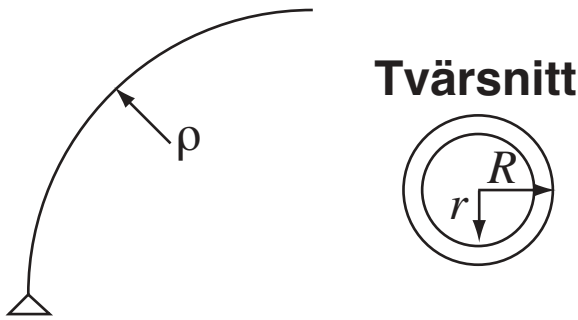
von Mises flytvillkor är:

$$\sigma_e = \sigma_s \quad (10)$$

vilket ger flytlasten som

$$P = \frac{\pi d^3}{35 \cdot L} \cdot \sigma_s \quad (11)$$

3. En stavhoppstäv är, i upphoppet, deformerad med minsta böjradie ρ enligt figur 3. Staven har elasticitetsmodulen E . Tvärsnittet är cirkulärt med innerradien r och yttre radie R . Bestäm ett uttryck för den maximala spänningen i staven (som funktion av givna parametrar)! (3p)
Ledning: Elastiska linjens ekvation anses gälla. Krökningen av balken kan ansättas som $\kappa = 1/\rho = -w''$ där w är balkens utböjning. Försumma normalkraften i staven.



figur 3 Böjd stavhoppstäv med cirkulärt håltvärsnitt

Lösning 3:

Använd samband mellan krökningsradie och krökning:

$$w'' = -\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI} \quad (12)$$

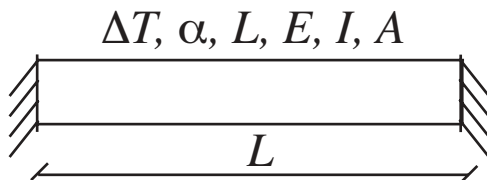
Detta ger böjmomentet

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (13)$$

och böjspänningen fås som

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} \cdot \frac{R}{2} = \frac{EI}{I\rho} \cdot R = \frac{E \cdot R}{\rho} \quad (14)$$

4. En stång är inspänd mellan två väggar. Vid temperaturen T_0 är den spänningsfri. Den utsätts sedan för en temperaturhöjning. Bestäm kvoten mellan yttreghetsmoment (i vekaste leden) och area, I/A , då plasticering och knäckning uppstår vid samma temperaturhöjning ΔT . (3p)
Balken har längden L , elasticitetsmodulen E och värmeutvidgningskoefficienten α .
Gör dimensionskontroll!



figur 4 Fast inspänd balk utsatt för temperaturlast

Lösning 4:

Deformationen p.g.a. temperaturhöjningen är:

$$\delta_{\Delta T} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L \quad (15)$$

Deformationen måste vara noll, vilket ger att stången måste belastas med en tryckande last som ger samma deformation, d.v.s

$$\delta_P = \frac{PL}{EA} = \delta_{\Delta T} \quad (16)$$

ur vilket vi kan lösa

$$P = EA\alpha\Delta T \quad (17)$$

Knäckning fås då

$$P = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (18)$$

med uttrycket för P enligt (17) fås:

$$EA\alpha\Delta T = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (19)$$

och

$$\Delta T_{\text{crit}} = \frac{4\pi^2 EI}{EA\alpha L^2} = \frac{4\pi^2 I}{A\alpha L^2} \quad (20)$$

För plasticitet gäller att

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{EA\alpha\Delta T}{A} = \sigma_s \quad (21)$$

vilket ger kritisk temperatur som

$$\Delta T_{\text{crit}} = \frac{\sigma_s}{E\alpha} \quad (22)$$

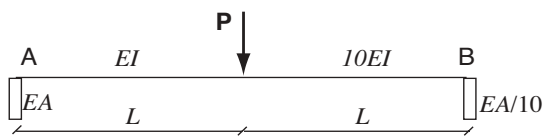
Sätt ΔT_{crit} för knäckning och plasticitet lika. Detta ger

$$\frac{\sigma_s}{E\alpha} = \frac{4\pi^2 I}{A\alpha L^2} \quad (23)$$

Från vilket man kan lösa I/A som

$$\frac{I}{A} = \frac{\alpha L^2 \sigma_s}{4\pi^2 E} = \frac{\sigma_s L^2}{4\pi^2 E} \quad (24)$$

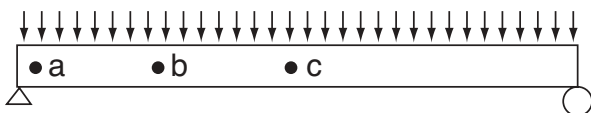
5. a) Balken i figur 5a har styvheten EI i vänstra delen (till halva balken) och styvheten $10EI$ i högra delen. Balken är momentfritt upplagd på stöden A och B. Stöd A är av stål med styvheten EA och stöd B av trä med styvheten $EA/10$. Bestäm lastfördelningen, d.v.s. hur mycket av lasten P som går ner i A, resp B! Motivering krävs för poäng! (1p)



figur 5a Balk fritt upplagd på stöd med olika styvhet.

b) Sätt en bit stearin mitt på en gitarrsträng. Kommer tonen att höjas, sänkas eller vara oförändrad? Bortse från dämpningseffekter. *Motivering krävs för poäng!* (1p)
 Ledning: Sänkt ton = lägre frekvens, höjd ton = högre frekvens.

c) Ett litet hål skall tas upp i en fritt upplagd balk (med rektangulärt tvärsnitt) enligt figur 5c. Hålet tas upp mitt (i höjddled) i balklivet. Tre möjliga positioner för håltagning visas i figuren: a) relativt nära stödet, b) en fjärdedel av balklängden från stödet och c) mitt i balken. Vilken av dessa positioner är lämpligast med avseende på hållfastheten. (1p)



figur 5c Fritt upplagd balk med tre möjliga positioner för håltagning. Hålen är små och tas upp mitt i balkens liv.

Lösning 5:

a) Statiskt bestämd balk. Jämvikt kräver att lika mycket last ($P/2$) går ned i varje stöd.

b) Ökad massa ger lägre frekvens, d.v.s. lägre ton. (Man kan möjligen hävda att styvheten ökar också, men det torde vara försumbart).

c) I alla positionerna är böjmomentet (nästan) noll p.g.a. att hålet tas upp i neutrallagret. I c är dessutom tvärkraften noll, vilket ger att skjuvspänningen dessutom är noll. M.a.o. är position c att rekommendera. (Det är inte helt ovanligt med haverier p.g.a. håltagning i position a).