

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR I2 – MHA 051

30 augusti 2003
8.45 – 12.45 (4 timmar)

Lärare: Anders Ekberg, tel: 772 3480

Maximal poäng är 15. För godkänt krävs 6 poäng.

ALLMÄNT

Hjälpmedel

1. Läroböcker i hållfasthetslära och mekanik.
2. Handböcker, formelsamlingar, elementarfall och sammanfattningsblad i hållfasthetslära, matematik och fysik. *Dock ej sammanfattningar med lösta exempel.*
3. Ordböcker och språklexikon.
 - Alla medtagna böcker måste vara skrivna på svenska, engelska eller tyska; de får innehålla 'normala' marginalanteckningar (inklusive omskrivningar av ingående formler), men inga lösningar till problemuppgifter.
 - Lösa anteckningar, varken handskrivna eller tryckta, är inte tillåtna. Undantaget är uppkopierade elementarfall,
4. Miniräknare med tangentbord och sifferfönster i en enhet (periferienheter, såsom t.ex skrivare och bandspelare, tillåts inte).

Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

Lärare

Anders Ekberg, tel 031 772 3480

Betygsättning

En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning, många fel, eller metodfel leder till att uppgiften inte ger något poäng. Normalt görs en helhetsbedömning av skrivningen när poängsätts; en 'snäll' bedömning av en lösning kan kompenseras av en hårdare bedömning på en annan.

Maximal poäng på tentan är 15 och betygsgränserna är enligt följande:

- 6-8 poäng ger betyg 3
- 9-11 poäng ger betyg 4
- 12-15 poäng ger betyg 5

Lösningar

Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler (2:a våningen i **södra** trapphuset, nya maskinhuset), samt på kursens hemsida (www.am.chalmers.se/~anek/teaching/k4/) måndagen den 1/9.

Resultatlista

Anslås på samma ställe som lösningarna senast måndag den 8/9, 2003.

Granskning

Måndag den 8/9, 2003 kl. 12.00–13.00 på Anders Ekbergs kontor, i Teknisk Mekaniks lokaler, nya M.huset, **norra** trapphuset, 3:e våningen.

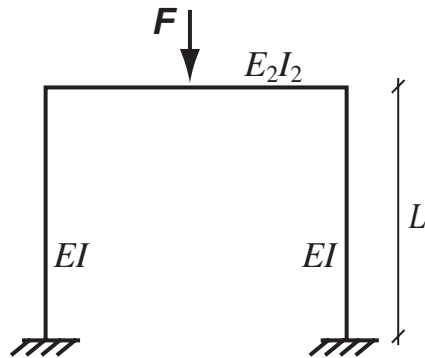
Tänk på:

- Uppgifterna är **inte** ordnade efter svårighetsgrad – välj ut de uppgifter du tycker att du behärskar och börja med dessa.
- Ange varifrån du hämtar de ekvationer som används.
- Om du gör antaganden utöver vad som anges i uppgiftstexten: förklara dessa.
- Bedöm om möjligt rimligheten i dina lösningar. Om du tycker resultatet verkar orimligt, men inte kan hitta några fel i lösningen eller tror att du räknat rätt, så påpeka detta.
- Kontrollera dimensionen i dina svar – en lösning med fel dimension i svaret ger normalt inga poäng.
- Skriv så att den som ska rätta kan läsa (*d v s* skriv tydligt) och ge förklaringar så att beräkningarna går att följa även för förvirrade lärare.
- Rita tydliga figurer; det måste framgå vad som är positiva/negativa riktningar på krafter, förskjutningar, etc.

UPPGIFTER

1. I figur 1 är knäcklasten för pelarna beroende av hur $E_2 I_2$ varierar. Bestäm övre och undre gränsvärde för knäcklasten F ! (3p)

Ledning: Lasten F är placerad mitt på balken.



figur 1 Ram vars pelare har styvheten EI och vars balk har styvheten $E_2 I_2$. Ramen är belastad med punktlasten F mitt på balken.

Lösning 1:

Då $E_2 I_2$ är mycket liten fås litet motstånd till rotation av övre pelaränden. Extremfallet är Eulers första knäckfall då

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (1)$$

Då $E_2 I_2 \rightarrow \infty$ fås helt vridstyva pelartoppar. Sidoförskjutningen är dock inte förhindrad, vilket ger Eulers femte knäckfall:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2)$$

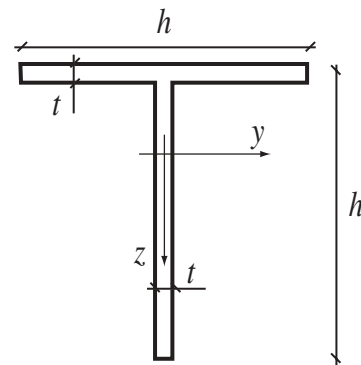
Symmetri ger att lasten i varje pelare är $P = F/2$. Detta ger gränsvärden på knäcklasten F enligt:

$$\frac{\pi^2 EI}{2L^2} < F_{kr} < \frac{2 \cdot \pi^2 EI}{L^2} \quad (3)$$

2. I tvärsnittet i figur 2 verkar ett böjande moment, M_y och en tvärkraft T_z .

- Bestäm den (till beloppet) största böjnormalspänningen i tvärsnittet! (1p)
- Bestäm den (till beloppet) största skjuvspänningen i tvärsnittet! (2p)

Ledning: Tvärsnittet kan anses vara tunnväggigt.



figur 2 Tunnväggigt T-tvärsnitt utsatt för böjande moment, M_y och tvärkraft T_z .

Lösning 2:

Ur elementarfall fås:

$$c = \frac{ht + ht/2}{ht + ht} = \frac{3}{4}h \quad (4)$$

samt yttröghetsmomentet (runt y-axeln) som

$$I_y = \frac{th^3}{12} + ht \left(\frac{3h}{4} - \frac{h}{2} \right)^2 + th \left(h - \frac{3h}{4} \right)^2 = \frac{5}{24}th^3 \quad (5)$$

- a) Detta ger största böjnormalspänning som

$$\sigma_x = \frac{M}{\frac{5}{24}th^3} \cdot \frac{3}{4}h = \frac{18}{5} \frac{M}{th^2} \quad (6)$$

- b) Maximal skjuvspänning uppkommer i tvärsnittets tyngdpunkt. Här är (om man studerar den undre avskjuvade delen):

$$S_{A^*} = \frac{3}{4}ht \cdot \frac{3}{8}h = \frac{9}{32}h^2t \quad (7)$$

vilket ger största skjuvspänningen som:

$$\tau_{\max} = \frac{S_{A^*} T}{Ib} = \frac{\frac{9}{32}h^2t \cdot T}{\frac{5}{24}th^3 \cdot t} = \frac{27}{20} \frac{T}{ht} \quad (8)$$

3. Kardanaxeln i en bil överför effekt från motorn till hjulen (via diverse differentialväxlar, m.m.) via ett vridande moment. En Volkswagen från 1973 har en motor på ca 50 kW (ca 70 hästkrafter), medan en S80 från 2003 har en motor på 200 kW (ca 270 hästkrafter). Utgå från att kardanaxeln har ett cirkulärt, solitt tvärsnitt och roterar vid samma varvtal. Beräkna

hur mycket större kardanaxelns radie måste vara i en S80 jämfört med en i 73 års folka om maximal effekt skall kunna överföras utan att spänningsnivån stiger. (3p)

Lösning 3:

Vridmomentet kan skrivas som

$$M_v = P/\omega \quad (9)$$

där P är effekten i watt och ω vinkelhastigheten (vilken antas vara densamma för de två fallen).

Maximal skjuvspänning p.g.a. vridningen ges av

$$\tau = \frac{2M_v}{\pi r^3} \quad (10)$$

där r är axelns radie.

Om skjuvspänningen skall vara konstant krävs att

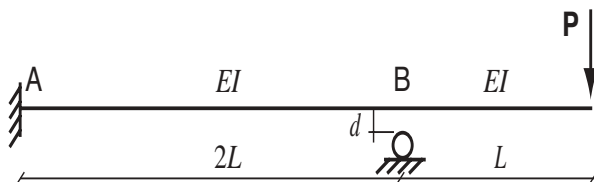
$$\frac{2P_{vw}}{\omega\pi r_{vw}^3} = \frac{2P_{s80}}{\omega\pi r_{s80}^3} \quad (11)$$

Med givna värden fås

$$\frac{50}{r_{vw}^3} = \frac{200}{r_{s80}^3} \Leftrightarrow \frac{r_{s80}}{r_{vw}} = \sqrt[3]{\frac{200}{50}} = 1.6 \quad (12)$$

4. Balken i *figur 3* är fast inspänd vid A och upplagd på ett stöd i B. Stödet är dock inte initieilt i kontakt med balken, utan ligger ett avstånd d under balken. Beräkna balkens nedböjning under lasten P , δ_p , som funktion av lasten P ! (3p)

Ledning: Studera de två fallen då stödet är, respektive ej är i kontakt. Nivån på P vid begynnande kontakt skall framgå!



figur 3 Balk med fast inspänning och upplagd på ett stöd vilket ligger ett avstånd d under balken. Balken är belastad med en böjande punktlast P .

Lösning 4:

Då stödet vid B inte är aktivt är änd deformationen

$$\delta_p = \frac{P(3L)^3}{3EI} = 9 \cdot \frac{PL^3}{EI} \quad (13)$$

Då är deformationen vid stödet B

$$\delta_B = \frac{P(2L)^2 \cdot 3L}{2EI} \left(1 - \frac{2L}{3 \cdot 3L}\right) = \frac{14PL^3}{3EI} \quad (14)$$

och relationen mellan δ_p och δ_B är

$$\delta_p = \frac{9 \cdot 3}{14} \delta_B = \frac{27}{14} \delta_B \quad (15)$$

Stödet blir aktivt då deformationen vid B blir

$$\delta_B = \frac{14PL^3}{3EI} = d \quad (16)$$

vilket sker vid lastnivån

$$P = \frac{3EId}{14L^3} \quad (17)$$

Änd deformationen kan då uttryckas i d som

$$\delta_p = \frac{27}{14} d \quad (18)$$

Över denna lastnivå är stödet aktivt och nedböjningen kan delas upp i en elastisk nedböjning av den utkragande konsolen (uttryckt i lasttillskottet P^*):

$$\delta_{p, flex} = \frac{P^*L^3}{3EI} \quad (19)$$

samt en stelkroppsförskjutning p.g.a. vinkeln vid stödet B:

$$\theta = \frac{P^*L \cdot 2L}{4EI} \quad (20)$$

vilket ger stelkroppsnedböjningen

$$\delta_{p, stel} = \frac{P^*L \cdot 2L}{4EI} L = \frac{P^*L^3}{2EI} \quad (21)$$

och det totala nedböjningstillskottet

$$\delta_{p, tot} = \frac{5}{6} \cdot \frac{P^*L^3}{EI} \quad (22)$$

Slutligen blir den totala nedböjningen då stödet är aktivt

$$\delta_p = \frac{5}{6} \cdot \frac{P^*L^3}{EI} + \frac{27}{14} d \quad (23)$$

Vi har $P^* = P - (3EId)/(14L^3)$, vilket ger

$$\delta_p = \frac{5}{6} \cdot \frac{PL^3}{EI} + \frac{49}{28} d \quad (24)$$

Sammanfattningsvis:

$$\frac{9PL^3}{EI} \text{ då } P \leq \frac{3EId}{14L^3} \text{ och}$$

$$\delta_P = \frac{5}{6} \cdot \frac{PL^3}{EI} + \frac{49}{28}d \text{ då } P \geq \frac{3EId}{14L^3} \quad (25)$$

5. a) Utgå från Eulers knäcklast

$$P_{kr} = (k \cdot \pi^2 EI) / L^2$$

och förklara hur denna hänger ihop med kollapsen av World Trade Centre. Med andra ord: vilken parameter förändrades innan kollapsen och vad berodde förändringen på. (1p)

b) Du har fått i uppdrag att ta upp ett hål i en statiskt belastad konstruktion. Hålet skall vara runt och tas upp mitt i en stor plåt (d.v.s inga randeffekter eller övriga spänningskoncentrationer spelar in). Med avseende på maximal spänning vid hålet, spelar det någon roll hur stort hålet är (och i så fall, vilken roll). Materialet är linjärt elastiskt. (1p)

c) Studera samma plåt som i b-uppgiften, men antag nu att plåten belastas i en riktning (i plåtens plan), samt att hålet är elliptiskt. Spelar hålets orientering någon roll? Motivera svaret! (1p)

L
ö
s
n
i
n
g
a
r

Lösning 5:

- a) Elasticitetsmodulen, E , kommer att bli lägre med ökad temperatur och till sist knäcker pelarna.
- b) Storleken spelar ingen roll. Maximal spänning kommer att vara 3 gånger den nominella.
- c) Orienteringen spelar roll. Ju längre sidan vinkelrät mot belastningen är (relativt sett), desto högre blir den maximala spänningen. (I extremfallet har vi en spricka vinkelrät mot lasten och den teoretiska maxspänningen är oändlig).