

Tentamen i Hållfasthetslära för I2 – MHA 051

28 augusti 2004, 8⁴⁵ – 12⁴⁵ (4 timmar)

Lärare: ANDERS EKBERG, tel: 772 3480
Maximal poäng är 15. För godkänt krävs 6 poäng

Allmänt

Hjälpmedel

1. Läroböcker i hållfasthetslära och mekanik.
 2. Handböcker, formelsamlingar, elementarfall och sammanfattningsblad i hållfasthetslära, matematik och fysik. Dock ej sammanfattningar med lösta exempel.
 3. Ordböcker och språklexikon.
- Medtagna böcker måste vara skrivna på svenska, engelska, tyska, franska eller ryska; de får innehålla "normala" marginalanteckningar (inklusive omskrivningar av ingående formler), men inga lösningar till problemuppgifter.
 - Lösa anteckningar är inte tillåtna, vare sig handskrivna eller tryckta. Undantaget är uppkopierade elementarfall och sammanfattningar
 - Miniräknare

Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten innan hjälpmedlet används.

Lärare

Anders Ekberg, tel 031 772 3480

Betygsättning

En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning, många fel, eller metodfel leder till att uppgiften inte ger någon poäng. Normalt görs en helhetsbedömning när skrivningen poängsätts; en "snäll" bedömning av en lösning kan kompenseras av en hårdare bedömning på en annan. Maximal poäng på tentan är 15 och betyg ges enligt följande schema:

- 6–8 poäng ger betyg 3
- 9–11 poäng ger betyg 4
- 12–15 poäng ger betyg 5

Lösningar

Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler (2:a våningen i södra trapphuset, nya maskinhuset), samt på kursens hemsida (www.am.chalmers.se/~anek/teaching/i2/) senast måndagen den 30/8.

Resultatlista

Anslås på samma ställe som lösningarna senast 13/9 2004.

Granskning

13/9 2004 kl 12–13 på Anders Ekbergs kontor, i Teknisk Mekaniks lokaler, nya M-huset, **norra** trapphuset, **3:e** våningen. Det går naturligtvis att granska tentan även efter denna "officiella" granskning, då hos sekreterarna på Teknisk Mekanik, nya M-huset, **södra** trapphuset, **2:a** våningen.

Tänk på att:

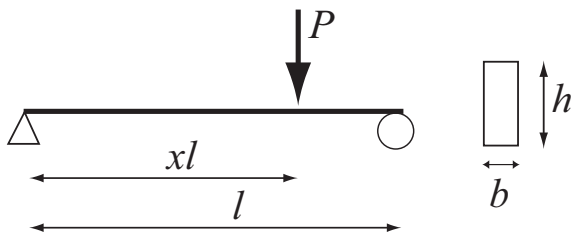
- Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad – välj ut de uppgifter du tycker att du behärskar och börja med dessa.
- Ange varifrån du hämtar de ekvationer som används.
- Om du gör antaganden utöver vad som anges i uppgiftstexten; förklara dessa.
- Bedöm om möjligt rimligheten i dina lösningar. Om du tycker resultatet verkar orimligt, men inte kan hitta några fel i lösningen eller tror att du räknat rätt, så påpeka detta.
- Kontrollera dimensionen i dina svar – en lösning med fel dimension i svaret ger normalt inga poäng.
- Skriv så att den som skall rätta kan läsa (d.v.s skriv tydligt) och ge förklaringar så att beräkningarna går att följa även för förvirrade lärare.
- Rita tydliga figurer; det måste framgå vad som är positiva/negativa riktningar på krafter, förskjutningar, *etc.*
- Det är inte säkert att all data som ges i uppgiften behövs. Lita på dig själv!

Uppgifter

1. Under sommaren hjälpte jag min pappa att bygga hus. Det innebar bl.a. att jag satt uppe på en balk. Eftersom jag tyckte den svajade betänkligt bestämde jag mig för att be dig kontrollräkna den. Balken är gjord av trä, med E-modulen $E = 10 \text{ GPa}$. Den har längden $l = 4,6 \text{ meter}$, höjden $h = 95 \text{ mm}$ och bredden $b = 40 \text{ mm}$, se figur 1. I uppgifterna b) och c) nedan antar du att balken belastas med en vertikal punktlast av 1 kN (vilket är min vikt plus säkerhetsmarginal) i mest ogynnsamt läge (d.v.s. den position där de sökta storheterna blir störst). Det räcker att resonera sig fram till vilken som är den mest ogynnsamma lastpositionen (d.v.s man behöver inte anta positionen som obekant och söka maximum, även om detta naturligtvis är tillåtet). *Felaktig lastposition ger en poängs avdrag även om efterföljande beräkningar är riktiga!*

- (a) Skissa moment och tvärkraftsfördelning då balken är belastad med en punktlast, P , placerad ett godtyckligt avstånd xl från vänstra stödet! [1p]
- (b) Bestäm största normalspänning i balken, samt maximal utböjning av balken i vertikallängd! [1p]
- (c) Bestäm största skjuvspänning i balken! [1p]

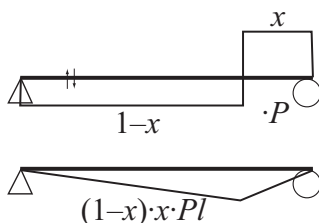
Ledning Jag är inte speciellt höjdrädd, så när jag säger att den svajade så skojar jag inte...



Figur 1: Balk för att bära upp ett loft. Längs- och tvärsektion.

Lösning

- a) Moment och tvärkraftsdiagram enligt figur



- b) Maximalt böjmoment, $M_{\max}$, uppkommer för en last placerad i mitten av facket.

$$M_{\max} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$

vilket ger maximalt normalspänning som

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} \cdot z_{\max} = \frac{Pl}{4} \cdot \frac{12}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3Pl}{2bh^2} = 19.1 \text{ MPa}$$

Detta kan jämföras med brottspänningen som är omkring 24 MPa .

Maximal nedböjning, $w_{\max}$, uppkommer också för last placerad mitt i facket.

$$w_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{12Pl^3}{48Ebh^3} = \frac{Pl^3}{4Ebh^3} = 71 \text{ mm}$$

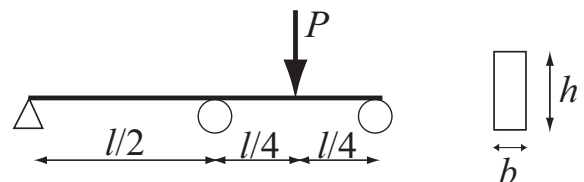
- c) Maximal tvärkraft, $T_{\max}$, uppkommer då lasten är placerad alldeles bredvid ena stödet.

$$T_{\max} = P$$

$$S = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

$$\tau = \frac{ST}{Ib} = \frac{bh^2}{8} \cdot P \cdot \frac{12}{bh^3} \cdot \frac{1}{b} = \frac{3P}{4bh} = 0.394 \text{ MPa}$$

2. I den slutliga konstruktionen har balken i uppgift 1 blivit uppstöttad av en mittpelare. Liksom tidigare har balken längden $l = 4,6 \text{ meter}$, höjden $h = 95 \text{ mm}$ och bredden $b = 40 \text{ mm}$, se figur 2. Balken belastas återigen av en punktlast på 1 kN . I denna uppgift antas den mest ogynnsamma lastpositionen vara då punktlasten angriper mitt i ett av facken (inte riktigt sant, men en bra approximation). Det andra facket antas obelastat. Bestäm maximal normalspänning i balken! [3p]



Figur 2: Färdigmonterad balk för att bära upp ett loft.

Lösning

Ersätt mittstödet med en obekant last, R_B . Elementarfall ger nedböjning vid denna som

$$\delta_B = \frac{l}{4} \cdot \frac{l^2}{48EI} \left(3 - \frac{4 \cdot (l/4)^2}{l^2} \right) P - \frac{R_B l^3}{48EI} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{48EI}{l^3} \cdot \frac{l^3}{192EI} \left(3 - \frac{1}{4}\right) P = \frac{11}{16}P (\text{uppåt})$$

Stödkraften vid högra stödet blir

$$R_C = \frac{R_B}{2} - \frac{3}{4}P = \frac{13}{32}P (\text{uppåt})$$

Böjmomentet under punktlasten blir

$$M_P = -\frac{13}{32}P \cdot \frac{l}{4} = -\frac{13}{128}PL$$

Stödkraften vid vänstra stödet blir

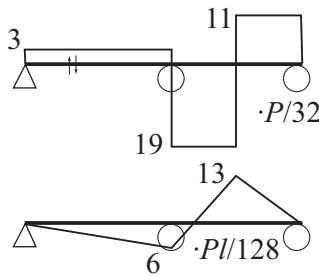
$$R_A = -\frac{R_B}{2} + \frac{1}{4}P = -\frac{3}{32}P (\text{nedåt})$$

Böjmomentet vid mittstödet blir

$$M_B = \frac{3}{32} \cdot \frac{l}{2}P = \frac{6}{128}PL$$

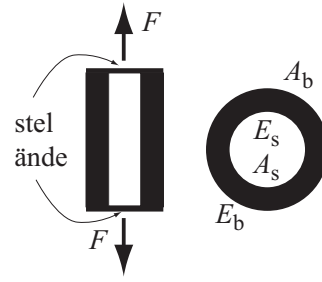
Samma balktvärsnitt för hela balken ger att maximal normalspänning uppkommer under lasten (se moment- och tvärkrafts diagram). Denna blir

$$\sigma_{\max} = \frac{13}{128}Pl \cdot \frac{12}{bh^3} \cdot \frac{h}{2} = 7.76 \text{ MPa}$$



3. För mekaniska komponenter vilka består av mer än ett material (t.ex. armerad betong) behöver man bestämma spänningsfördelningen mellan materialen. Uttryck, för stängen i figur 3, spänningen i stålet, σ_s , som en funktion av kraften F , E-modulerna för stål och betong, E_s och E_b ; samt betongens och stålets areor, A_b och A_s . Förutsätt att materialen har samma tvärkontraktionstal och att full samverkan råder mellan stål och betong!

Ledning Med full samverkan menas att materialen binder fullständigt till varandra. [3p]



Figur 3: Stång uppbyggd av betong (svart) med area A_b och E-modul E_b , samt stål (vitt) med area A_s och E-modul E_s . Stången är belastad med den centriskt applicerade kraften F och har totala arean $A = A_b + A_s$.

Lösning

Jämvikt ger

$$\sigma_s A_s + \sigma_b A_b = F$$

Kompatibilitet ger

$$\delta_b = \delta_s \Leftrightarrow \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot l = \frac{\sigma_b}{E_b} \cdot l \Rightarrow \sigma_b = \frac{E_b}{E_s} \cdot \sigma_s$$

Insättning av σ_b i jämviktsekvationen ger

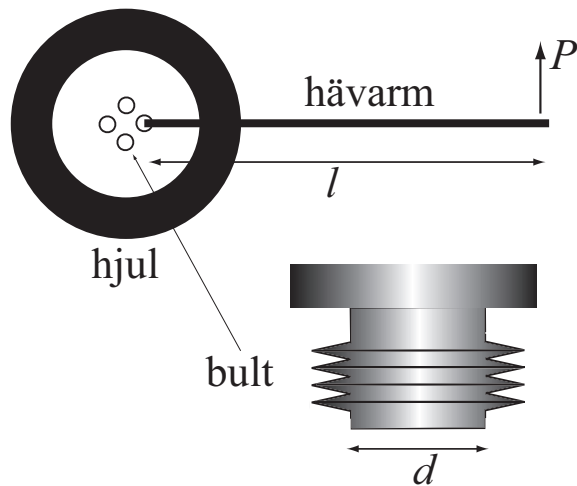
$$\sigma_s A_s + \frac{E_b}{E_s} \cdot \sigma_s A_b = F \Rightarrow \sigma_s = \frac{F \cdot E_s}{A_s \cdot E_s + A_b \cdot E_b}$$

Rent praktiskt innebär detta att man enkelt kan approximeras yttröghetsmomentet genom att betrakta hela komponenten som gjord av material 1 och sedan skala arean hos material 2 med $\alpha = (E_2/E_1) - 1$ i Steiners sats under förutsättningen att $A \cdot a^2$ -termen dominerar (vilket den t.ex. gör i armerad betong p.g.a att armeringsjärnen har en relativt liten area, men stor hävarm).

4. När hjulbultarna har rostat fast på bilen kan man förlänga hävarmen på fälgkorset med ett rör. Antag att bultgeometrin är enligt figur 4 med $d = 3$ cm och att materialet har en flytspänning i *enaxligt drag* på $\sigma_s = 600$ MPa. Antag vidare att en person trycker med kraften $P = 700$ N och att hävarmen är l enligt figur 4. Bortse från eventuella spänningskoncentrationer vid gängorna!

- Använd von Mises effektivspänningskriterium för att bestämma materialets flytskjuvspänning τ_s ! [1p]
- Vid vilken hävarm, l_s , kommer muttern att börja plasticera? [1p]
- Vid vilken hävarm, l_p , kommer muttern att kollapsa? [1p]

Ledning Av egen erfarenhet med en SAAB V4 kan jag meddela att svaret på c-uppgiften är i trakterna av 3 meter.



Figur 4: Avskruvning av hjulbult med hjälp av förlängt fälgkors som ger en total hävarm l . Bultens diameter är d .

Lösning

- a) Samma von Mises spänning för de båda fallen ger:

$$\sqrt{\sigma_s^2} = \sqrt{3\tau_s^2} \Rightarrow \tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

- b) Maximal tillåtet vridmoment fås ur:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_v (d/2)}{\pi (d/2)^4} = \frac{16M_v}{\pi d^3} = \tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

$$M_v = \frac{\pi \sigma_s d^3}{16\sqrt{3}}$$

Pålagt moment är

$$M_v = P \cdot l_y \Rightarrow l_y = \frac{\pi \sigma_s d^3}{16\sqrt{3}P} = 2.62 \text{ m}$$

- c) Vridmoment då bulten plasticerar fås ur

$$M_{vf} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (d/2)^3 \cdot \tau_s$$

Detta svarar mot hävarmen

$$l_p = \frac{\pi d^3 \sigma_s}{12\sqrt{3}P} = 3.5 \text{ m}$$

- (a) I finita elementsimuleringar delar man in den komponent man vill analysera i element. Förenklat kan man säga att ju mindre element man använder, desto bättre noggrannhet får man i resultaten¹ (jämför en styckvis kurvanpassning), men desto längre tid tar också simuleringarna. För utmattningssimuleringar använder man generellt mindre element än för krocksimuleringar (man bör åtminstone göra det). Ge två skäl till detta där du diskuterar tidsåtgång och nödvändig beräkningsnoggrannhet för de två fallen. [1p]
- (b) Stålböroar besiktigas regelbundet för att man skall hitta utmattningssprickor som har bildats. Om en spricka hittas åtgärdas den antingen genom att man byter ut eller reparerar den skadade komponenten, eller genom så kallad stoppbörning. Det senare innebär att man borrar ett hål precis vid sprickspetsen. Det verkar i förstone märkligt att man kan laga en komponent genom att göra hål i den, men det fungerar. Förklara varför baserat på en diskussion om spänningstillståndet vid sprickspetsen före och efter stoppbörningen. [1p]
- (c) Varför kollapsade tornen i World Trade Centre då flyplanen flög in i dem den 11/9? Förklara varför tornen intresserade direkt, varför de rasade efter ett tag och varför raset ledde till total kollaps. [1p]

Lösning

- a) Två förslag till motiveringar:

- Krocksimuleringar beskriver stora plastiska deformationer över tiden. Detta är mycket beräkningskrävande. Utmattningssimuleringar beskriver normalt (globalt) elastisk deformation, vilket är mycket mindre beräkningskrävande. Man kan därför "kosta på sig" fler (d.v.s mindre) element.
- Den stora plastiska deformation som sker vid en krock är ett globalt fenomen. För att få vettig beräkningsnoggrannhet krävs förenklat att man har med sig rätt energi (d.v.s massa och hastighet), samt rätt styvheter in i beräkningarna. Detaljupplösningen av spänningsfördelningen är ointressant. Utmattning är däremot ett lokalt fenomen där den lokala spänningen i en punkt bestämmer huruvida en spricka bildas.²

5. Uppgifterna nedan ger ingen poäng (oavsett om svaret är rätt) om du inte motiverar ditt svar! En bra (d.v.s hållfasthetsmässigt korrekt) motivering ger naturligtvis poäng även för svar andra än just de jag tänkt mig!

¹Detta behöver inte vara sant eftersom man kan kompensera elementstorlek med mer sofistikerade element, men det är inget du behöver bekymra dig om här.

²I verkligheten är det lite mer komplicerat eftersom utmattning kräver att spänningen i en liten volym är tillräckligt hög. Men vi pratar här om någon kubikmillimeter, så att kalla det "lokalt" är ingen stor approximation...

- b) Vid sprickspetsen är spänningen teoretiskt oändlig (i praktiken har du en plasticerad zon framför sprickan). Vid hålkanten är spänningen högst tre gånger den nominella spänningen. Borrningen sänker alltså den lokala spänningen (jämför uppgiften ovan)
- c) Byggnaden kollapsade inte direkt p.g.a att den klarade stötblastningen av det flygande planet. När brand uppstod steg dock värmen, vilket gjorde stålet mjukare (E-modulen sjönk). När stålet var tillräckligt mjuk knäckte stålpelarna.³ Då de övre våningsplanen föll ner på de nedanför överstegs bärförmågan hos dessa våningsplan. Resultatet blev ett fortskridande ras.

³Det finns alternativa förklaringar om att upplagsanordningarna för golvbalkarna kollapsat. Vilken som var den verkliga orsaken spelar mindre roll. Mekanismen med brandens inverkan var densamma för bägge.