

Dugga i Hållfasthetslära för I2 – Lösningar

23 november 2001

10.00 – 12.00 (skrivningstid 2 timmar)

1. a) En axel med tunnväggigt cirkulärt tvärsnitt sitter fast inspänd mellan två väggar enligt Fig. 1a. Den är belastad med ett vridande moment T . Bestäm största skjuvspänning i axeln på grund av det vridande momentet. Uttryck svaret i T och d ! (2p)
Tvärsnittet kan anses vara tunnväggigt.

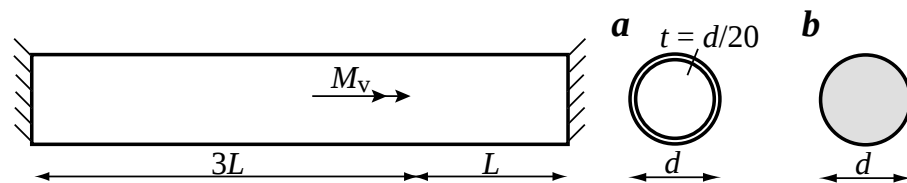


FIG. 1 Balk med cirkulärt tvärsnitt utsatt för ett vridande moment.
a) tunnväggigt tvärsnitt b) solitt tvärsnitt

- b) Om tvärsnittet varit solitt, enligt Fig. 1b, hur mycket hade den maximala skjuvspänningen förändrats? (1p)

Lösning

- a) Inför vridmomentet vid högra stödet som statiskt övertalig. Det geometriska villkoret (förvridningen = noll vid stödet) blir:

$$\varphi_B = \frac{T3L}{GK} + \frac{T_B4L}{GK} = 0 \Rightarrow T_B = -\frac{3}{4}T.$$

Snittmomenten blir: $M_v = T_B = -\frac{3}{4}T$ till höger om T och $M_v = T + T_B = \frac{1}{4}T$ till vänster om T .

Största skjuvspänning fås vid det, till beloppet, största vridmomentet. I

tvärsnittet är $\tau_{\max} = \frac{|M_v|}{K}r$. För ett tunnväggigt rör är $K = \frac{\pi t d^3}{4}$, vilket ger

$$\tau_{\max} = \frac{\frac{3}{4}T}{\frac{\pi t d^3}{4}} \frac{d}{2} = \frac{30T}{\pi d^3} \left[\frac{Nm}{m^3} = Pa \right] \text{ för } t = \frac{d}{20}.$$

b) För solitt tvärsnitt är $K = \frac{\pi d^4}{32}$ och allt annat oförändrat. Detta ger

$$\frac{\tau_{\max}^b}{\tau_{\max}^a} = \frac{32}{4 \cdot 20} = \frac{2}{5}.$$

2. En balk är belastad med en lastintensitet q [N/m] enligt figuren.

Bestäm

a) tvärkrafts- och moment-fördelning (1p)

b) största och minsta böjnormalspänning i balken då $L = 2$ m, $h = 0.2$ m, $t = 0.01$ m och $q = 2$ kN/m (2p)

Tvärsnittet kan anses vara tunnväggigt.

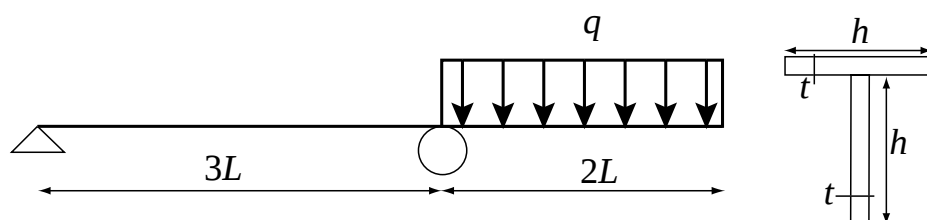


FIG. 2 Balk belastad med utbredd last, samt dess tvärsnitt.

Lösning

a) Balken är statiskt bestämd. Frilägg.

Horisontell jämvikt ger $R_{HA} = 0$.

Momentjämvikt runt vänstra stödet ger $-R_B \cdot 3L + q \cdot 2L \cdot 4L = 0 \Rightarrow R_B = \frac{8}{3}qL$.

Vertikal jämvikt ger $R_A + R_B - q \cdot 2L = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{2}{3}qL$.

Snitt i spannet mellan stöden ger $T(x) + R_A = 0$ och $M(x) + R_A \cdot x = 0$, d.v.s.

$$T(x) = \frac{2}{3}qL \text{ och } M(x) = \frac{2}{3}qLx.$$

Till höger om B (med koordinaten ξ från höger), får vi $T(\xi) = -q\xi$ och

$$M(\xi) = q\frac{\xi^2}{2}. \text{ Största momentet fås vid stödet där } M = 2qL^2.$$

b) Areatröghetsmomentet fås ur utdelad kopia.

$$\text{Med } c = h \cdot \frac{ht + \frac{ht}{2}}{ht + ht} = \frac{3}{4}h \text{ fås } I_y = \frac{th^3}{12} + ht\left(\frac{3}{4}h - \frac{h}{2}\right)^2 + th\left(h - \frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{5}{24}th^3.$$

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}. \text{ Extremvärden fås (för } M_{\max} \text{) vid } z = z_{\max} \text{ och } z = z_{\min}.$$

Vi har $z_{\max} = h - c$ och $z_{\min} = -c$, vilket ger

$$\sigma_{\max} = \frac{2qL^2}{\frac{5}{24}th^3} \left(h - \frac{3}{4}h \right) = \dots = 48 \text{ MPa och}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{2qL^2}{\frac{5}{24}th^3} \left(-\frac{3}{4}h \right) = \dots = -144 \text{ MPa}.$$

3. Ett cirkulärt balktvärsnitt, enligt figuren, är utsatt för ett rent böjande moment. Bestäm det största moment som balken kan tåla om
- spänningen högst får uppgå till flytspänningen, σ_s (d v s ingen plasticering tillåts) [1p]
 - balken tillåts bli genomplasticerad [1p]
- Uttryck svaren i d och σ_s

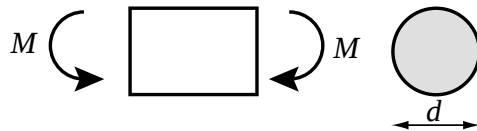


FIG. 3 Cirkulär balksektion med diameter d utsatt för ett böjande moment.

Lösning

a) $\sigma_{\max} = \frac{M}{I} z_{\max}; I = \frac{\pi d^4}{64}, z_{\max} = \frac{d}{2}, \text{ vilket ger}$

$$M_{\max} = \frac{\sigma_s \cdot \pi d^4}{64 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_s \left[\frac{\text{Nm}^3}{\text{m}^2} = \text{Nm} \right]$$

b) Dubbelsymmetriskt tvärsnitt ger att neutrallagret ligger fast. Spänningen är σ_s i övre delen och $-\sigma_s$ i nedre delen. Dessa är halvcirklar med arean $A_s = \frac{\pi d^2}{8}$ och centrumavstånden $a = 2z_{TP} = \frac{4d}{3\pi}$. Detta ger det plastiska momentet som

$$M_f = \sigma_s \cdot A_s \cdot a = \sigma_s \cdot \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{4d}{3\pi} = \frac{\sigma_s d^3}{6} \left[\frac{\text{Nm}^3}{\text{m}^2} = \text{Nm} \right].$$

4. a) I balktvärsnittet som visas i figuren, verkar en tvärkraft T . Bestäm största skjuvspänningen (uttryckt i T , h och t) som uppkommer på grund av denna tvärkraft! [2p]

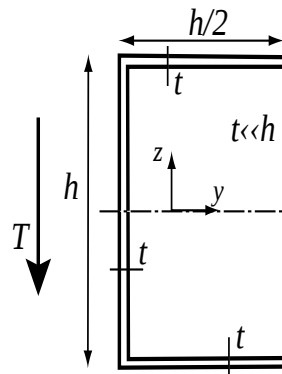


FIG. 4 Tunnväggigt balktvärsnitt belastat med en tvärkraft, T .

Lösning

Symmetri ger att största skjuvspänning uppkommer vid $z=0$.

Vi har: $S_{A^*}\left(z = \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2}t\frac{h}{2} + \frac{h}{2}t\frac{h}{4} = \frac{3h^2t}{8}$. Ytttröghetsmomentet fås ur utdelade

kopior med $c = \frac{h}{2} \cdot \frac{ht + \frac{h}{2}t}{ht + 2\frac{h}{2}t} = \frac{3}{8}h$ till $I_y = \frac{th^3}{12} + \frac{1}{2}t\frac{h}{2}h^2 = \frac{1}{3}th^3$.

Maximala skjuvspänningen blir $\bar{\tau}_{\max} = \frac{S_{A^*}T}{I_y b} = \frac{9}{8} \frac{T}{ht} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$.