

Tentamen i Hållfasthetslära för I2

18 december 2001

14.15 – 19.15 (skrivningstid 5 timmar)

FORMALIA

LÖSNINGAR

Hjälpmedel

1. Läroböcker i hållfasthetslära och mekanik.
2. Handböcker, formelsamlingar och sammanfattningsblad i hållfasthetslära, matematik och fysik. *Dock ej sammanfattningar med lösta exempel eller OH-kopior från föreläsningarna om avancerad hållfasthetslära.*
3. Elementarfall för balkböjning (4 sid).
4. Areakonstanter (2 sid).
5. Ordböcker och språklexikon.

Alla medtagna böcker måste vara skrivna på svenska, engelska, tyska, franska eller ryska; de får innehålla 'normala' marginalanteckningar (inklusive omskrivningar av ingående formler), men inga lösningar till problemuppgifter.

Lösa anteckningar, varken handskrivna eller tryckta, är inte tillåtna.

6. Miniräknare med tangentbord och sifferfönster i en enhet (periferienheter, såsom t.ex skrivare och bandspelare, tillåts inte).

Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

Lärare

Anders Ekberg, tel (772) 3480

Lösningar

Anslås på anslagstavlan vid ingången till institutionens lokaler (2a våningen i södra trappuppgången, nya maskinhuset) på förmiddagen dagen efter tentan.

Betygsättning

En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig

lösning, många fel, eller metodfel leder till att uppgiften inte ger något poäng. Normalt görs en helhetsbedömning av skrivningen när poängsätts; en 'snäll' bedömning av en lösning kan kompenseras av en hårdare bedömning på en annan.

Maximal poäng på tentan är 15 och betygsgränserna är enligt följande:

- 6-8 poäng ger betyg 3
- 9-11 poäng ger betyg 4
- 12-15 poäng ger betyg 5

Resultatlista

Anslås på samma ställe som lösningarna senast onsdagen den 9/1 2002.

Granskning

Måndag den 14/1 kl. 12.00. Plats meddelas på kursens hemsida samt på rättningslistor (p.g.a. ombyggnation i M-huset)

Tänk på:

- Uppgifterna är **inte** ordnade efter svårighetsgrad – välj ut de uppgifter du tycker att du behärskar och börja med dessa.
- Ange varifrån du hämtar de ekvationer som används.
- Om du gör antaganden utöver vad som anges i uppgiftstexten: förklara dessa.
- Bedöm om möjligt rimligheten i dina lösningar. Om du tycker resultatet verkar orimligt, men inte kan hitta några fel i lösningen eller tror att du räknat rätt, så påpeka detta.
- Kontrollera dimensionen i dina svar – en lösning med fel dimension i svaret ger inga poäng.
- Skriv så att den som ska rätta kan läsa (*d v s* skriv tydligt) och ge förklaringar så att beräkningarna går att följa.
- Rita tydliga figurer; det måste framgå vad som är positiva/negativa riktningar på krafter, förskjutningar, *etc.*

UPPGIFTER

1. En träbalk består av två ihopspikade plankor enligt Fig. 1. Spikarna sitter med ett centrumavstånd c . Balksektionen belastas med en tvärkraft, T . Bestäm (uttryckt i T , h och c) den skjuvkraft, F varje spik måste överföra. (3p)

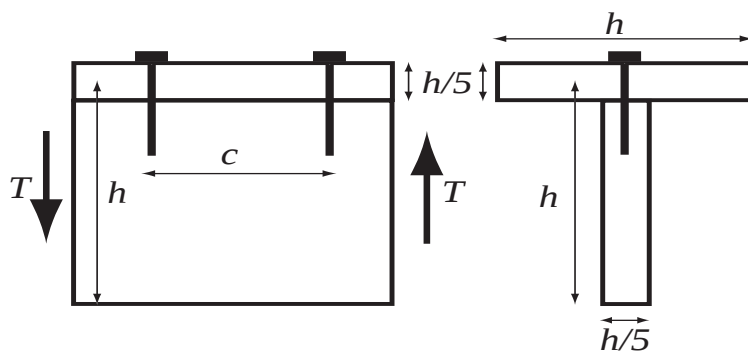
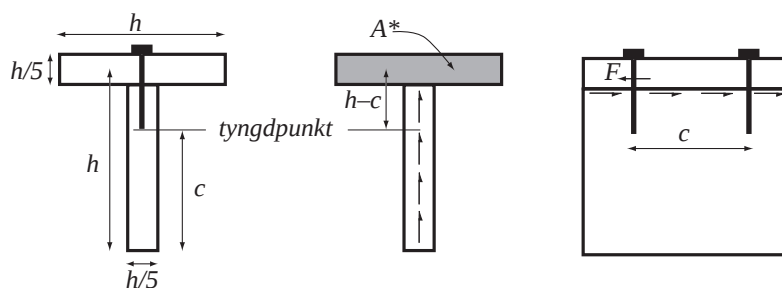


FIG. 1 Fritt upplagd träbalk belastad med en punktlast och med en sektion uppbyggd av två ihopspikade plankor.

a) Sidvy av den spikade balken;

b) den sammansatta tvärsektionen med spikplacering.



$$\text{Tyngdpunktsläget ges av } c = h \cdot \frac{h(h/5) + h(h/10)}{h(h/5) + h(h/5)} = \frac{3}{4}h$$

Yttröghetsmomentet är

$$I_y = \frac{(h/5)h^3}{12} + h(h/5)\left(\frac{3}{4}h - \frac{h}{2}\right)^2 + (h/5)h\left(h - \frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{h^4}{24}$$

$$\text{Statiska ytmomentet av avskjuvad del är } S_{A^*} = (h/5) \cdot h \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)h = \frac{h^3}{20}$$

Detta ger en skjuvspänning i snittet alldeles under flänsen, som är:

$$\tau = \frac{S_{A^*}T}{I_y(h/5)} = \frac{(h^3/20) \cdot T}{(h^4/24) \cdot (h/5)} = 6 \frac{T}{h^2}$$

$$\text{Skjuvkraften i varje spik blir då } F = \tau \cdot c \cdot \frac{h}{5} = 6 \frac{T}{h^2} \cdot c \cdot \frac{h}{5} = \frac{6Tc}{5h}.$$

2. En balk, med längden $L = 3 \text{ m}$ och med ett tunnväggigt, cirkulärt tvärsnitt med diametern $d = 0.2 \text{ m}$ och tjockleken $t = 0.01 \text{ m}$, monteras och belastas med en excentrisk punktlast P enligt Fig. 2. (Punktlasten angriper via en helt stel hävarm).
- Bestäm maximalt P som kan tillåtas om högsta tillåtna effektivspänning enligt Tresca får vara $\sigma_e = 300 \text{ MPa}$ i punkt A. (3p)

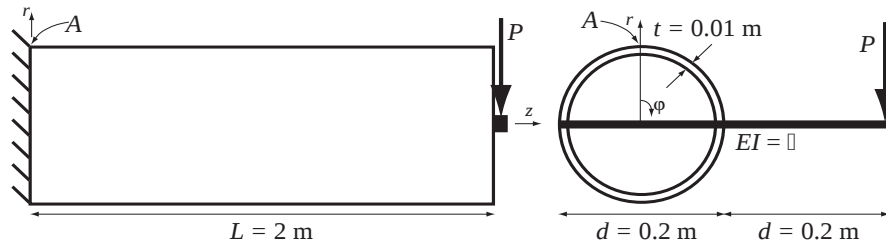


FIG. 2 Konsolbalk belastad med excentrisk punktlast (OBS! ej proportionell skiss)
a) Sidvy;
b) konsolbalkens tvärsnitt, och den excentriska lastens placering.

I punkt A ger lasten ett vridande moment $M_v = P \cdot (3/2)d$ och ett böjande moment $M = P \cdot L$.

Sektionen har ett areatröghetsmoment $I_y = \frac{\pi t d^3}{8}$, radien $a = \frac{d}{2}$ och tjockleken $h = t$ (enligt Lundhs beteckningar).

Detta ger, i punkten A, en böjnormalspänning $\sigma_z = \frac{M}{I_y} z = \frac{4PL}{\pi t d^2}$ och en

skjuvspänning av det vridande momentet $\tau_{z\varphi} = \frac{M_v}{2\pi a^2 h} = \frac{3P}{\pi d t}$. Här är $L = 10d$,

vilket ger en spänningsmatris som: $\mathcal{S}(z, \varphi, r) = \frac{P}{\pi t d} \cdot \begin{bmatrix} 40 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Eftersom skjuvspänningen är noll på ett plan med normal i r -riktning, så får vi direkt en huvudspänning som $\sigma_r = 0$. Övriga huvudspänningar fås ur:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z + \sigma_\varphi}{2}\right)^2 + \tau_{z\varphi}^2} = 20 \pm \sqrt{409}. \text{ Numrera}$$

huvudspänningarna i storleksordning. Detta ger $\sigma_1 = 20 + \sqrt{409}$, $\sigma_2 = 0$ och $\sigma_3 = 20 - \sqrt{409} \times [P/(\pi t d)]$.

Huvudspänning enligt Tresca fås som $\sigma_{eT} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sqrt{409} \cdot P/(\pi t d)$. Krav

$$\sigma_{eT} \leq 300 \times 10^6 \Rightarrow P_{\max} = \frac{\pi t d}{2\sqrt{409}} \cdot 300 \times 10^6 \approx 47 \text{ kN (med insatta värden)}.$$

3. Balken i Fig. 3 har elasticitetsmodulen E , areatröghetsmomentet I och längder enligt figuren. Den belastas med en punktlast i ena änden (D).
- a) Beräkna nedböjningen δ under punktlasten P_D om balken enbart är belastad med denna punktlast! (2p)
- b) Behåll P_D . Hur stor punktlast P_B (streckad i figuren) måste appliceras i punkt B för att totala ändnedböjningen δ (av P_D och P_B) skall bli noll? (1p)

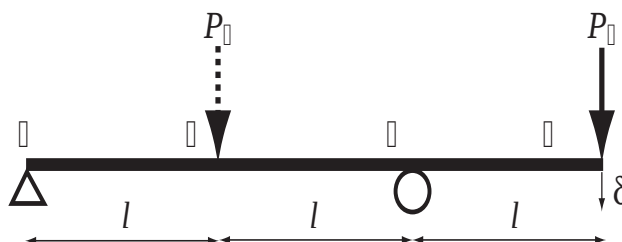


FIG. 3 Sidvy av balken i problem 3.

a) Nedböjning av P_D :

Dela upp i två elementarfall enligt figur.

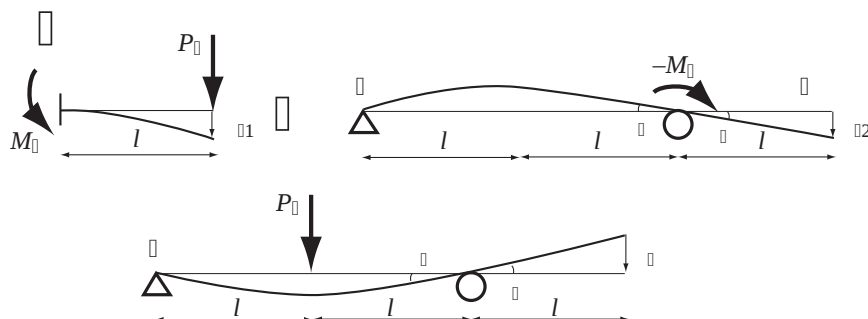
$$\delta_{D1} = \frac{P_D l^3}{3EI}, M_C = P_D l, \Theta_C = \frac{P_D l \cdot 2l}{3EI} \text{ och } \delta_{D1} = \frac{2P_D l^3}{3EI}, \text{ vilket ger}$$

$$\delta_D = \frac{P_D l^3}{EI} = \delta_D^a.$$

b) Nedböjning av P_B :

$$\Theta_C = \frac{P_B (2l)^2}{16EI} = \frac{P_B l^2}{4EI} \text{ och } \delta_D = \frac{P_B l^3}{4EI} = \delta_D^b.$$

$$\text{Sätt } \delta_D^a = \delta_D^b. \text{ Detta ger } \frac{P_D l^3}{EI} = \frac{P_B l^3}{4EI} \Rightarrow P_B = 4P_D.$$



4. Den fritt upplagda balken i Fig. 4 har ett rektangulärt tvärsnitt och belastas med en vertikal och en horisontell last (båda med magnituden P) i en sektion enligt Fig. 4. Beräkna största böjnormalspänningen i balken! (3p)

Notera att stöden ritats som s k gaffelstöd i perspektivritningen. Detta betyder inget annat än att de beter sig som fritt upplagda ("triangel-" och "rull-") stöd i såväl vertikal som horisontell riktning.

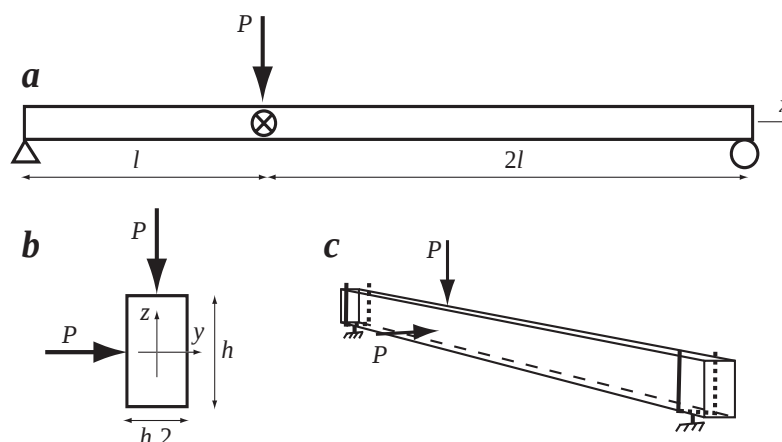


FIG. 4 Fritt upplagd balk belastad med en vertikal och en horisontell last
a) Sidvy av balken;
b) balkens tvärsektion;
c) perspektivskiss av balken med de angripande lasterna.

I sektionen där lasterna angriper fås:

$$M_y = M_z = -\frac{P \cdot l \cdot 2l}{3l} = -\frac{2}{3}Pl$$

Areatröghetsmomenten är

$$I_y = \frac{(h/2)h^3}{12} = \frac{h^4}{24} \text{ och } I_z = \frac{h(h/2)^3}{12} = \frac{h^4}{96}$$

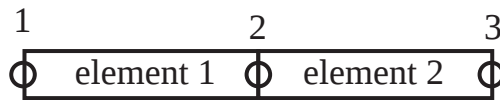
Största böjnormalspänningen blir (p g a negativt M_z):

$$\sigma_{x, \max} = \frac{M_y}{I_y} z_{\min} - \frac{M_z}{I_z} y_{\max} = \frac{-\frac{2}{3}Pl}{\frac{h^4}{24}} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) - \frac{-\frac{2}{3}Pl}{\frac{h^4}{96}} \cdot \frac{h}{4} = \frac{24Pl}{h^3}$$

5. a) Elementstyvhetsmatrisen för ett stångelement är

$$\mathbf{K}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Visa med ett enkelt exempel hur *assemblering* av elementstyvhetsmatriser till en global styvhetsmatris går till. Det skall framgå vad de olika delarna av den globala styvhetsmatrisen kommer ifrån! (1p)



Studera en stång indelad i två stängelement. Den globala styvhetsmatrisen blir (förutsatt att elementlängderna, elementareorna och elementens E-moduler är desamma):

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och används i ekvationen } \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}.$$

Här är δ förskjutningarna och P krafterna i de tre noderna. I den globala styvhetsmatrisen kommer de fyra översta vänstra elementen från det första elementet och de nedersta fyra elementen från det andra elementet.

b) Varför är den maximala spänningen vid en sprickspets ett dåligt mått på materialpåkänningen vid sprickan? Ge exempel på ett mått man kan använda istället! Vad beskriver detta mått? (1p)

Vid sprickspetsen blir spänningen teoretiskt oändlig om man använder elastisk teori (använder man plasticitetsteori, så får man ett ändligt värde, men ändå problem p g a höga gradienter och, i fallet med idealplastiskt material, ett maxvärde som är oberoende av lastnivån).

Istället är det lämpligt att använda spänningsintensitetsfaktorn. Den beskriver storleken på (den elastiska) spänningssingulariteten.

c) Vad innebär hållfasthetsmässig *redundans*? (1p)

Att man byggt in en övertalighet i strukturen. Ett exempel är när man bygger en bro som klarar att fungera även då en bropelare blir avslagen.