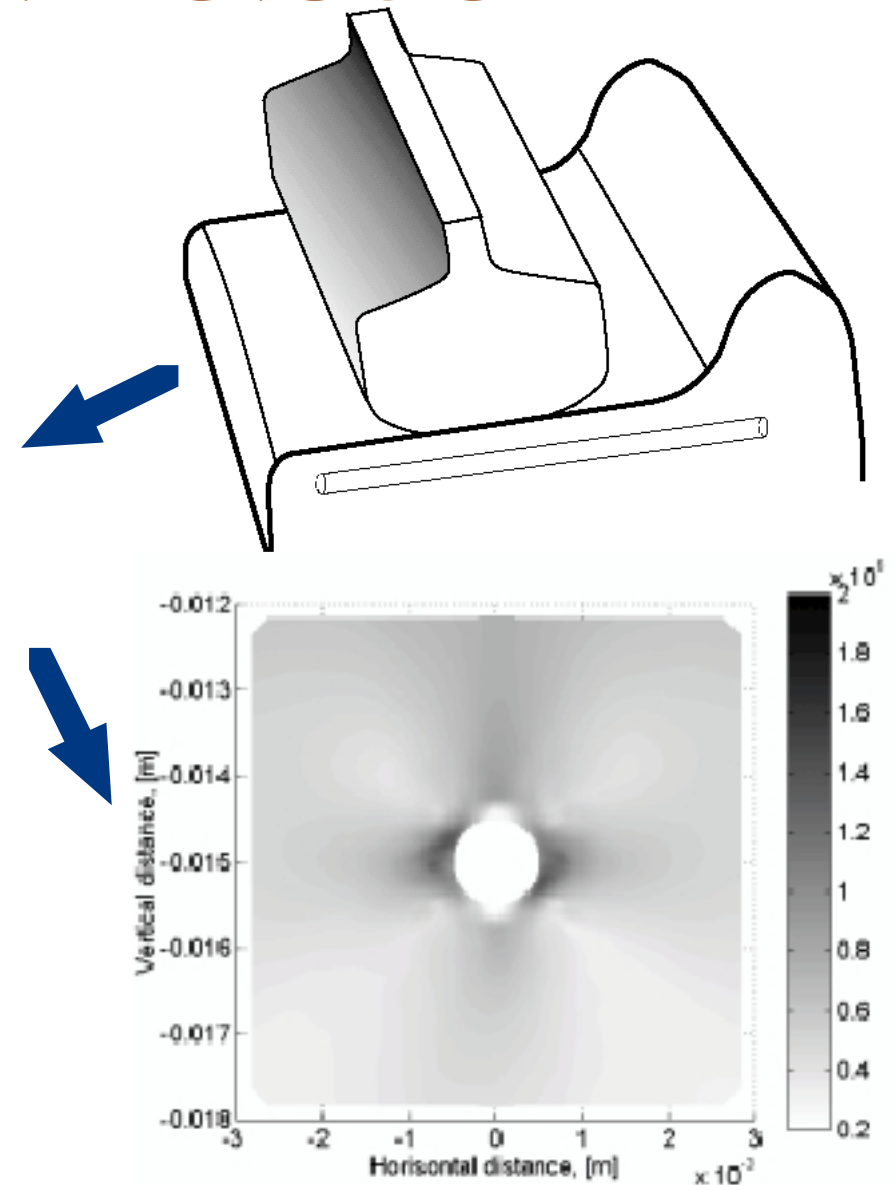
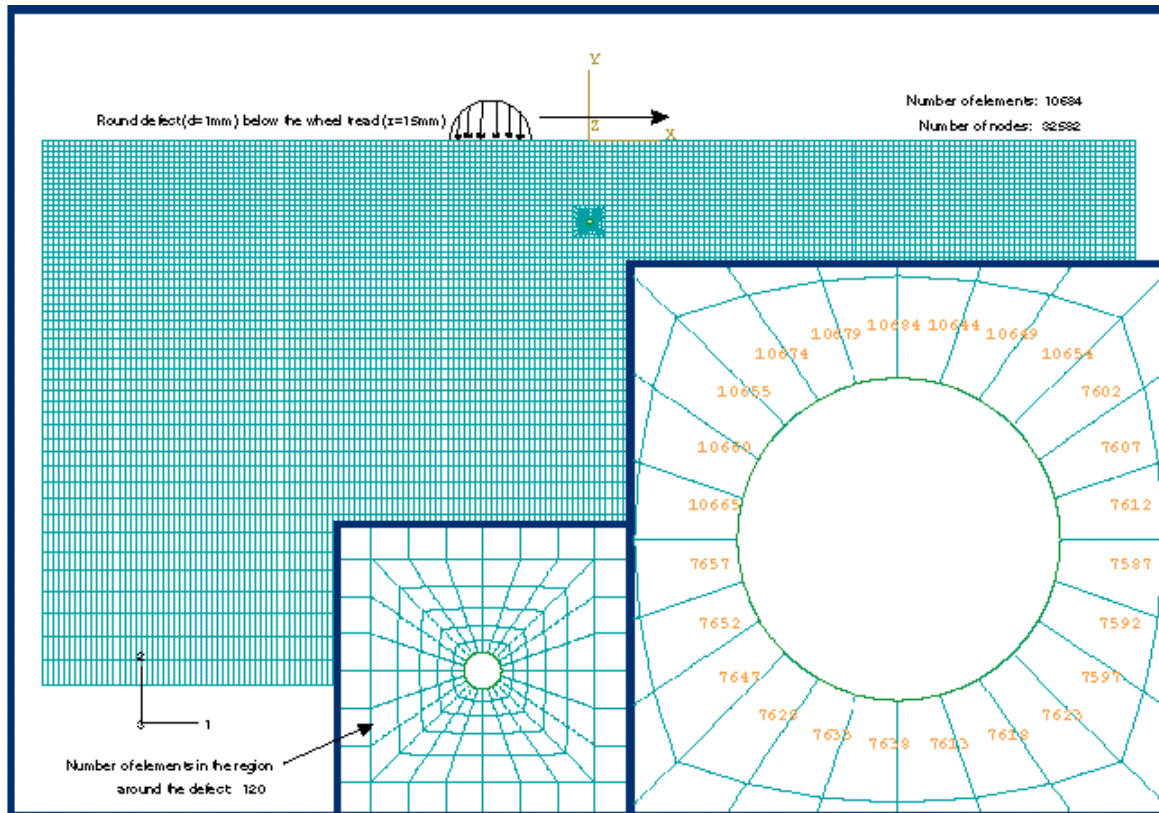


Finita Elementmetoden

Bilder: Elena Kabo



Anders Ekberg

Teknisk mekanik / CHARMEC
anders.ekberg@me.chalmers.se

Bakgrund

Allmängiltighet

- ◇ Geometri
- ◇ Last
- ◇ Material

Datorbaserat

- ◇ CAD -> CAE -> CAM
- ◇ Beräkningsintensivt

Skalbart

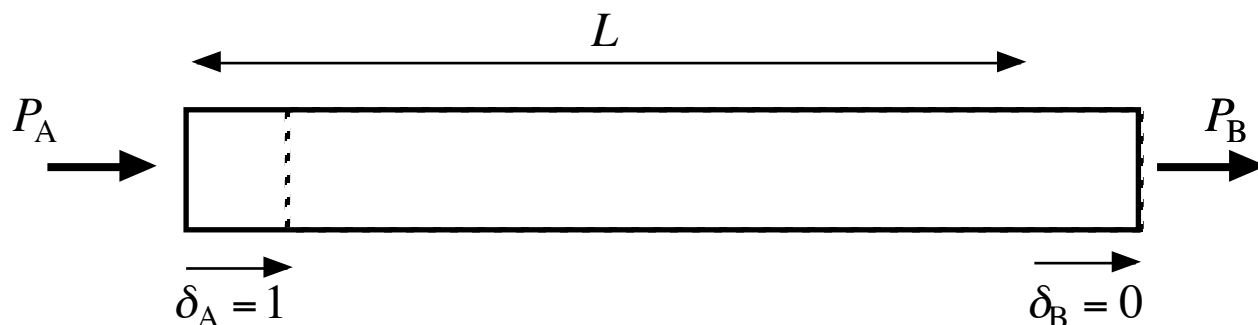
- ◇ Små / stora modeller
- ◇ Modulärt
- ◇ Portabla data
- ◇ Paralleldatorer

Historia

- ◇ Matematisk kuriositet ≈ 1900
- ◇ Ingenjörsmoell, Boeing ≈ 1950
- ◇ Kommersiellt standardverktyg ≈ 2000
- ◇ I Sverige:
 - Byggnadsstatik, Chalmers (S O Asplund)
 - Verkstadsindustrin ≈ 1980
 - Byggindustrin ≈ 1990
- ◇ Dagsläget
 - Allmänt accepterat
 - Hyfsat användarvänligt
 - Snygg resultatredovisning

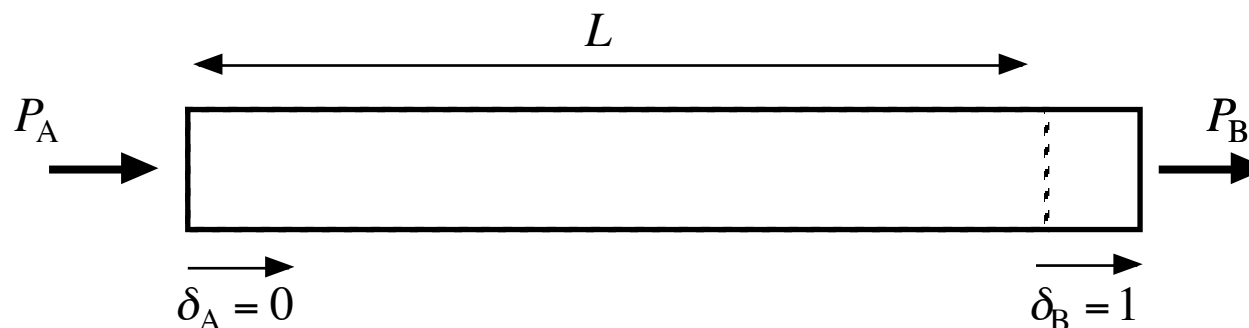
Teori – exempel, stångbärverk

Elementarfall



$$\delta_A = \frac{P_A L}{EA} \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \delta_A = P_A$$

$$P_B = -P_A \Leftrightarrow -\frac{EA}{L} \delta_A = P_B$$



$$\delta_B = \frac{P_B L}{EA} \Leftrightarrow \frac{EA}{L} \delta_B = P_B$$

$$P_A = -P_B \Leftrightarrow -\frac{EA}{L} \delta_B = P_A$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix}$$

Elementstyvhetsmatrix

◇ För ett element

$$\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{d}_e = \mathbf{P}_e$$

◇ Hur översätta till en struktur?

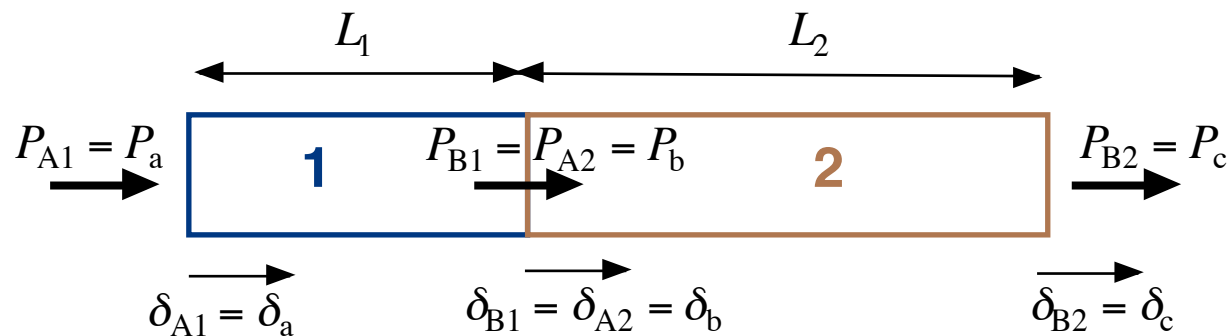
Assembly

- ◇ För varje element

$$\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{d}_e = \mathbf{P}_e$$

- ◇ För strukturen

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{P} \text{ där } \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_e, \mathbf{d} = \sum \mathbf{d}_e \text{ och } \mathbf{P} = \sum \mathbf{P}_e$$



- ◇ För element **1**:

$$\frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{A1} \\ \delta_{B1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{A1} \\ P_{B1} \end{bmatrix}$$

- ◇ För element **2**:

$$\frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{A2} \\ \delta_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{A2} \\ P_{B2} \end{bmatrix}$$

- ◇ För **hela stängan**:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_a \\ P_b \\ P_c \end{bmatrix}$$

(om vi antar $L_1 = L_2 = L$, etc)

Styvhetsmatrisen

Noder och element

- ◇ **Element** är de delar den totala strukturen (stången) är indelad i. Elementnätet kallas **mesh**
- ◇ **Noder** är där element möts



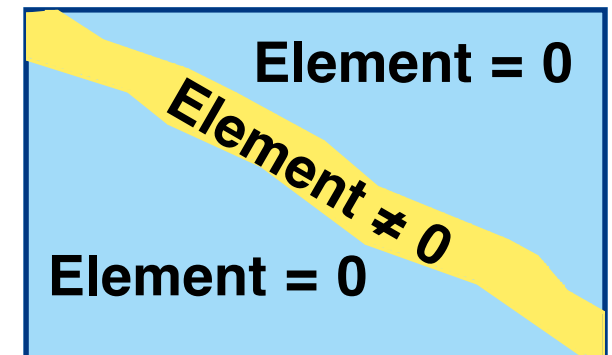
Symmetri

- ◇ **Element**styvhetsmatriserna är symmetriska → den **globala** styvhetsmatrisen blir symmetrisk

Bandning

- ◇ Varje element ger ett styvhetstillskott enbart till ett par noder → styvhetsmatrisen blir **gles**
- ◇ Om numreringen av noderna är hyfsat smart, så kommer detta att resultera i en **bandad styvhetsmatris**

Symmetri och bandning kan utnyttjas vid lagring av K och lösning av ekvationssystemet

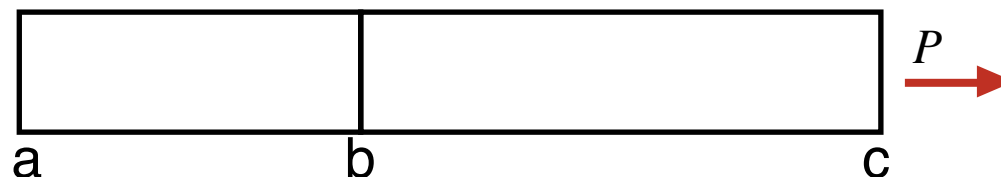


Laster och randvillkor

Laster

- ◇ **Yttre laster** läggs på i högerledet av ekvationssystemet

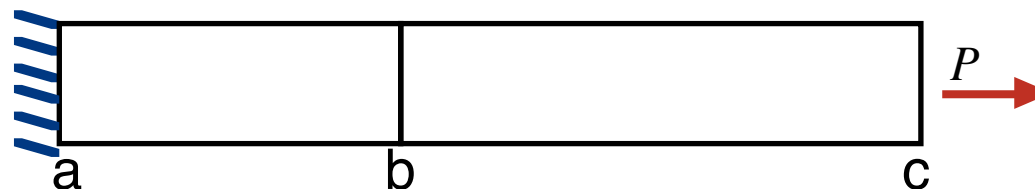
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_c \end{bmatrix}$$



- ◇ **Randvillkor**, i form av föreskrivna förskjutningar, läggs på i förskjutningsvektorn. Om dessa är noll, kan motsvarande laster och styvhetslement helt enkelt strykas.

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_c \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1+1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}$$



Beräkning av resultat

Ekvationssystem

- ◇ FEM–formulering resulterar i ett ekvationssystem som
 - alltid är lösbart
 - innehåller många obekanta
 - byggs upp av en gles matris
- ◇ Datorberäkning måste (i princip) alltid till
- ◇ Statiska, elastiska problem är snabba att beräkna (även om de kan ha hundratusentals obekanta)
- ◇ Resultatet blir normalt bättre ju fler element man använder (meshberoende)

Komplicerande faktorer

- ◇ **Dynamiska** (eller tidsberoende, kvasistatiska) problem
- ◇ Olinjära problem
 - **plasticitet**
 - **kontaktproblem**
- ◇ **Adaptivitet** (lösningskvalitet)

Problemtyper

Balkar o stänger

- ◇ Enligt exemplet ovan

Knäckning (2:a ordningens teori)

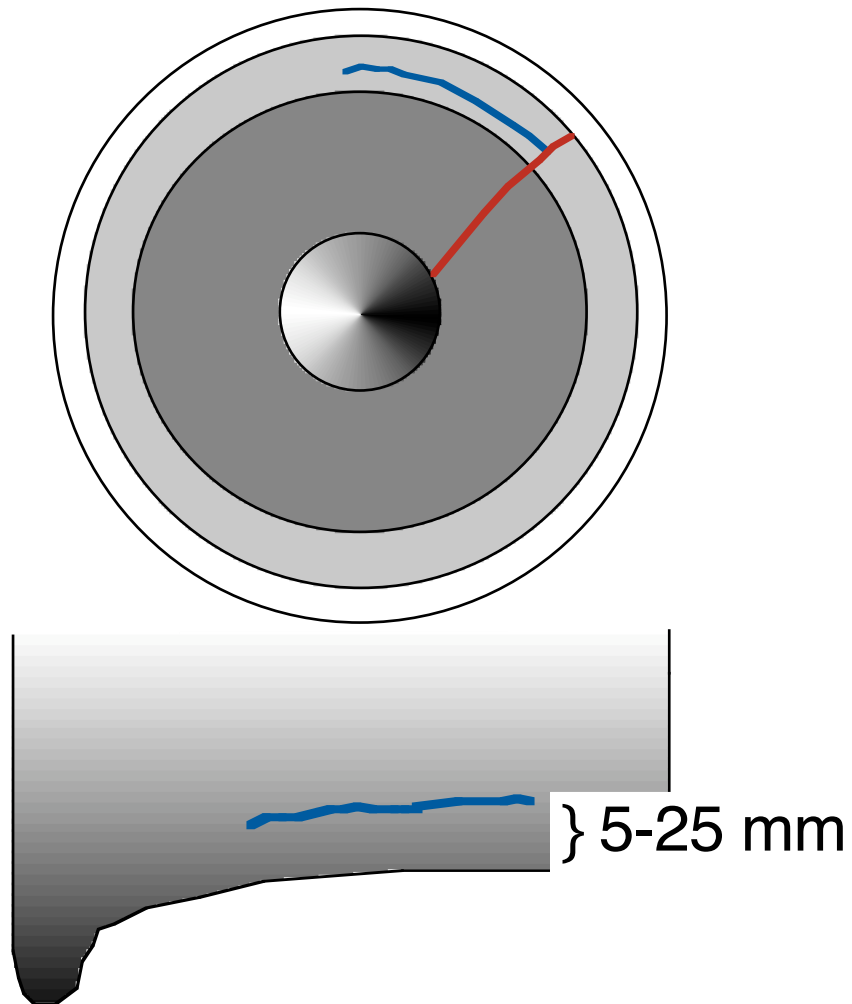
- ◇ Differentialekvation: $w^{IV} - \frac{N}{EI}w'' = \frac{q}{EI} \Rightarrow \mathbf{K} + n^2 \cdot \mathbf{K}_2 = \mathbf{P}$
- ◇ Styvhetsmatrisen $\mathbf{K} + n^2 \cdot \mathbf{K}_2$ vekare ju högre tryckande normalkraft (representerad av n^2)
- ◇ Vid kritiskt värde blir styvheten 0 ($\det[\mathbf{K} + n^2 \cdot \mathbf{K}_2] = 0$)

Balksvängning (dynamik)

- ◇ Differentialekvation $w^{IV} + \frac{\rho A}{EI}\ddot{w} = \frac{q}{EI} \Rightarrow \mathbf{K} + a^2 \cdot \mathbf{K}_2 = \mathbf{P}$
- ◇ Detta är helt analogt med knäckningsekvationen, men den andra termen beror av svängningsfrekvensen (accelerationen)
- ◇ Vid kritiskt värde ($\det[\mathbf{K} + a^2 \cdot \mathbf{K}_2] = 0$) har vi en egenfrekvens)

Exempel

Materialdefekt i järnvägshjul

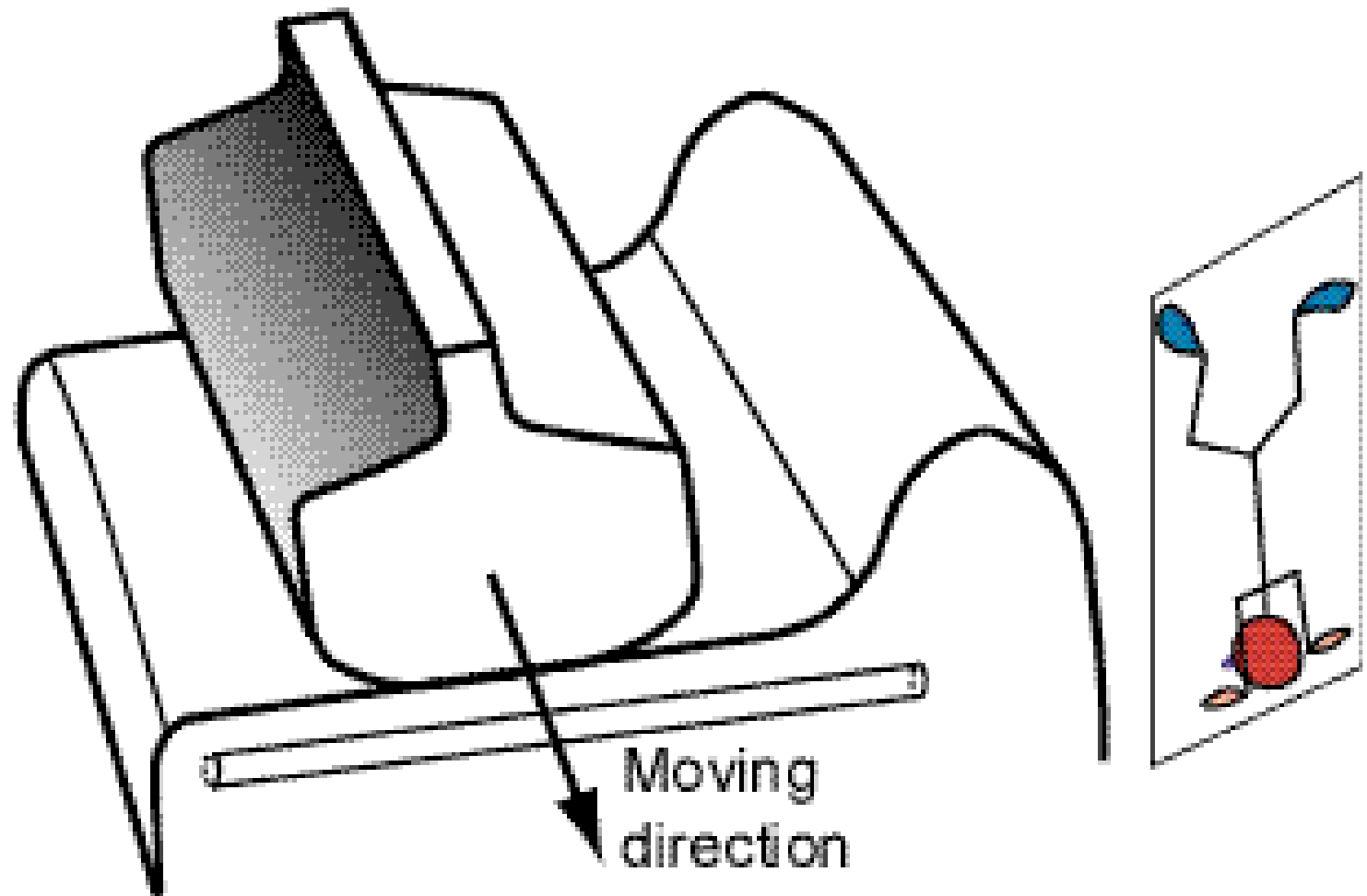


Picture by courtesy of Johan Marais, Spoornet

Modell

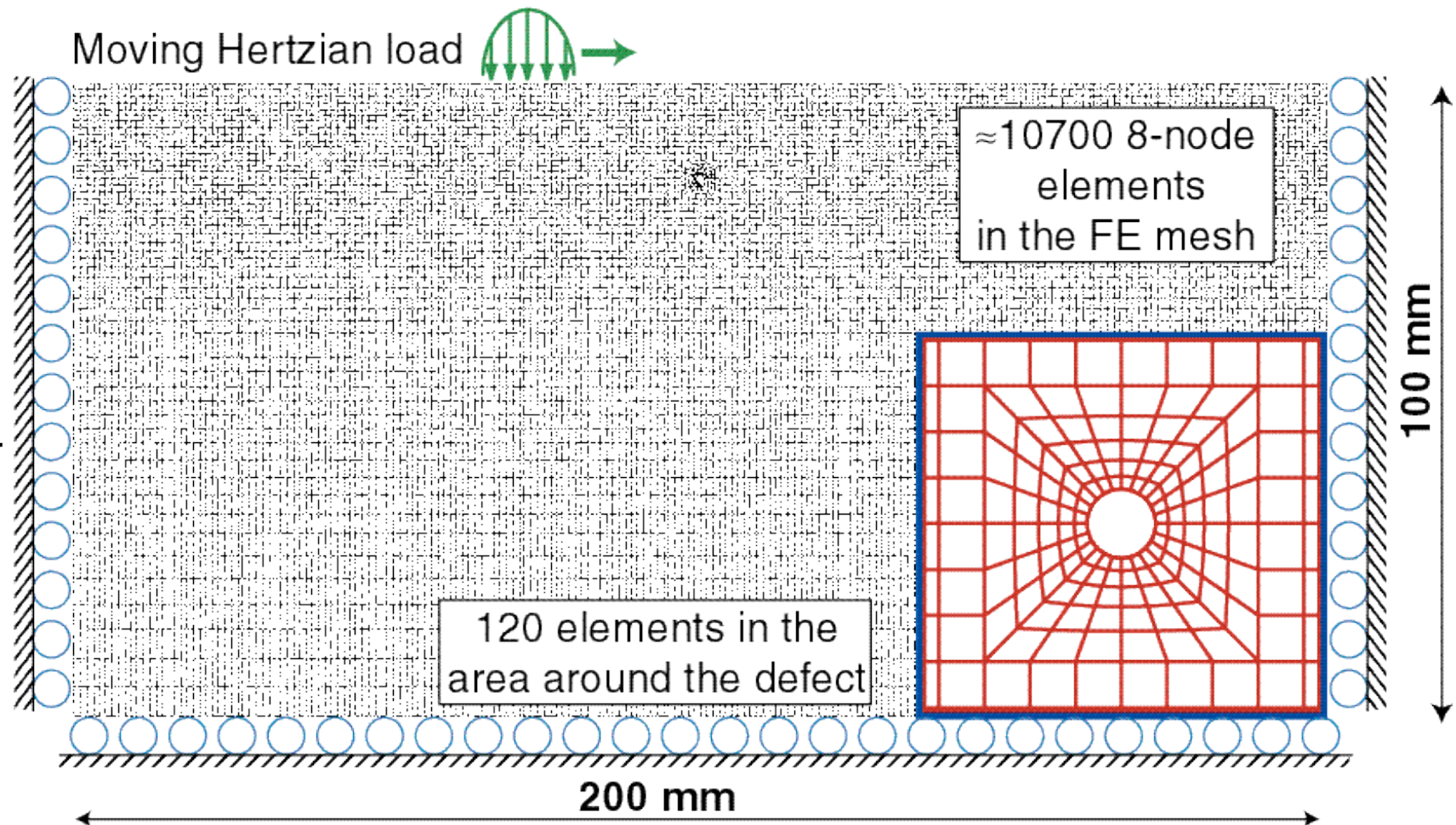
Idealiseringar

- ◇ **Tvådimensionell**
- ◇ **Ciculär**
(cylindrisk)
defekt
- ◇ **Analytisk**
kontaktlast
(‘cylinder
på ett plan’)
- ◇ Friktionslös
kontakt med
“**rörlig räls**”



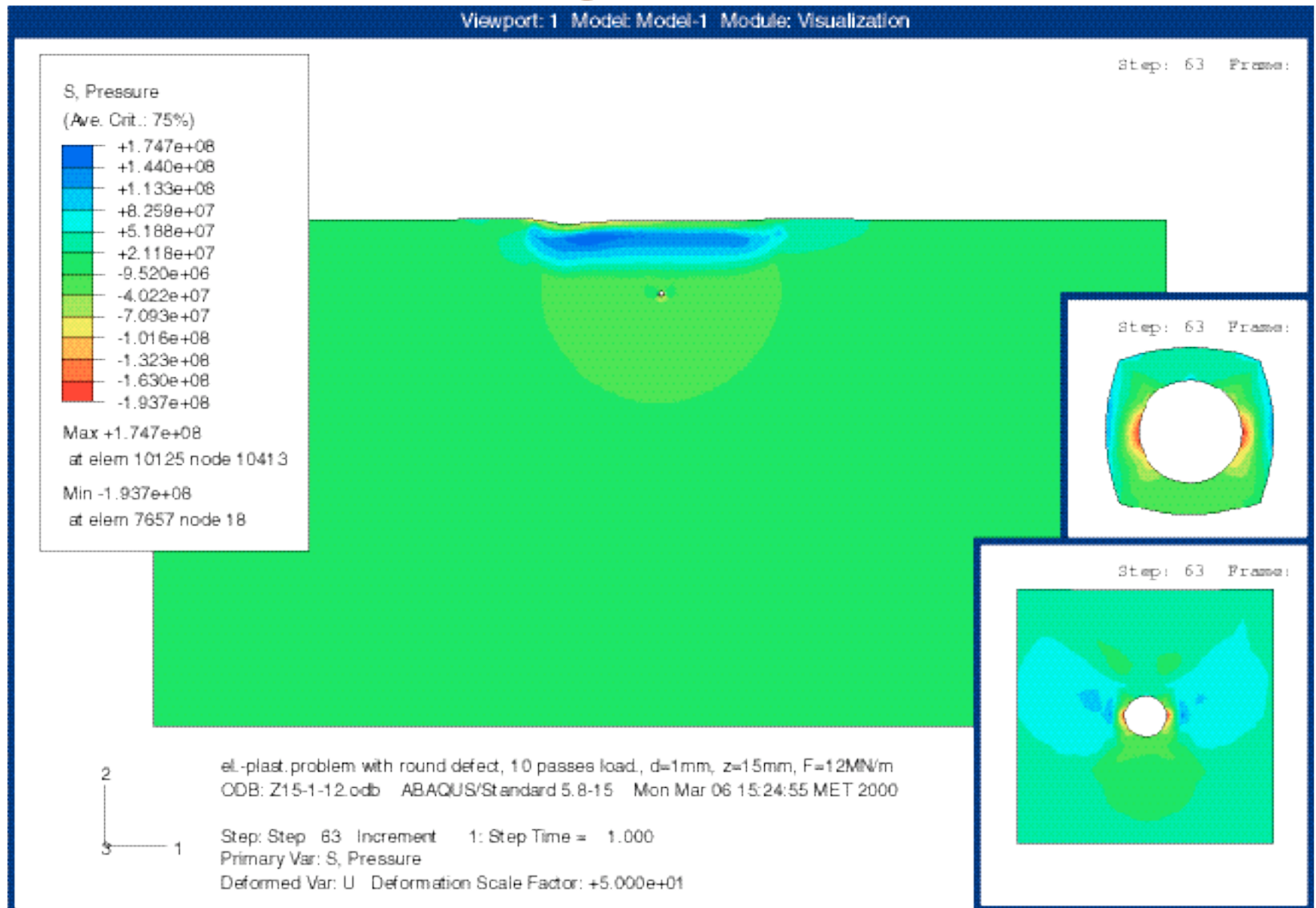
Finit elementmodell

- ◇ 10 684 element
- ◇ 32 582 noder
- ◇ ca 65 000 obekanta
- ◇ löses för 105 lastplaceringar
- ◇ i varje lösning itereras en plastisk respons fram
- ◇ lösningstid ca 7 timmar



Trescas effektivspänning

Residualspänningar



Spänningskoncentrationer

Definition

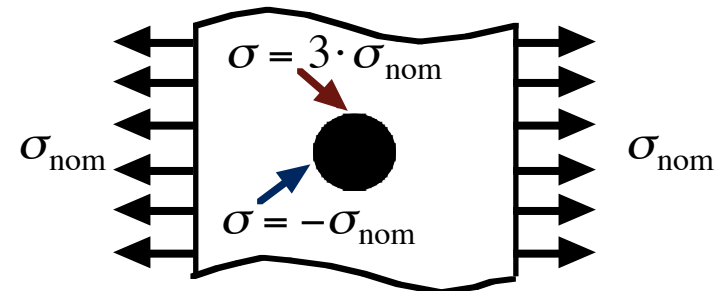
- ◇ **Nominella** spänning ($d\hat{E}/\hat{E}$ spänning om inte hål, käl, radie *etc* funnits): σ_{nom}
- ◇ **Maximal** spänning (enligt elastisk teori) vid spänningshöjaren: σ_{max}
- ◇ Spänningskoncentrationsfaktorn:

$$K_t = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

- ◇ K_t för olika geometrier finns tabellerad
- ◇ Användbart vid handberäkningar
- ◇ Vid **FEM-beräkningar** behövs inte K_t eftersom **den maximala spänningen beräknas automatiskt**
- ◇ Dock bra för att kontrollera resultat (σ_{max} kan vara meshberoende)

Exempel

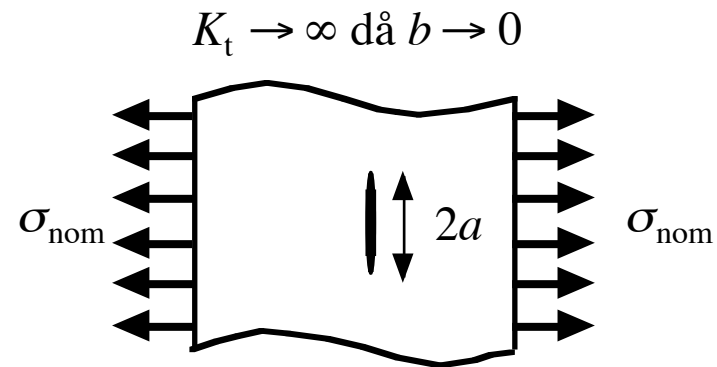
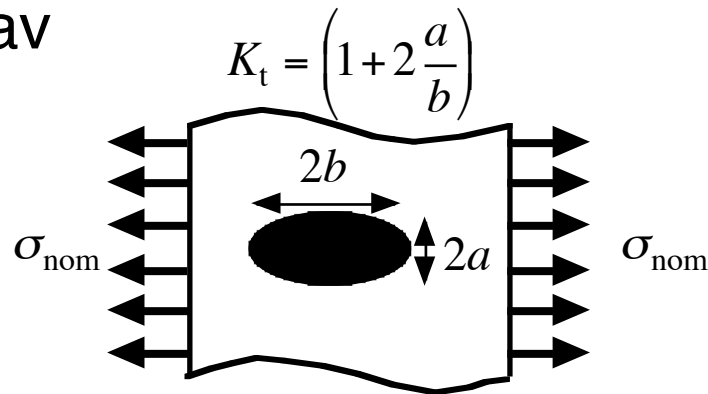
- ◇ Cirkulärt hål i oändlig skiva $K_t = 3$



Brottmekanik

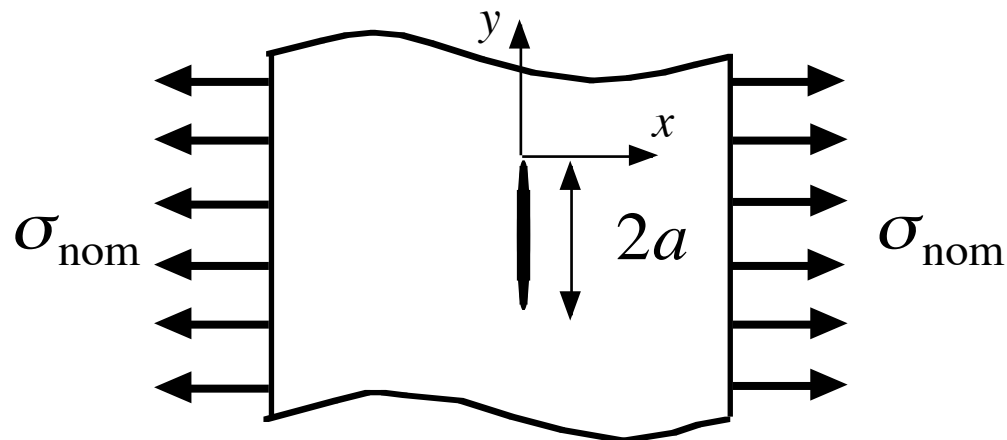
Bakgrund

- ◇ Om hålet är elliptiskt, så kommer spänningskoncentrationen att ges av



Spänningsintensitetsfaktor

- ◇ Framför sprickan ges spänningen (i x-led) av



$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi y}} + O(x)$$

$$\sigma_x \rightarrow \infty \text{ då } y \rightarrow 0$$

- ◇ Spänningsintensitetsfaktorn

$$K_I = \sigma_{\text{nom}} \sqrt{\pi a} \cdot f \quad [\text{Nm}^{-3/2}]$$

Brottmekanik I

Användbarhet

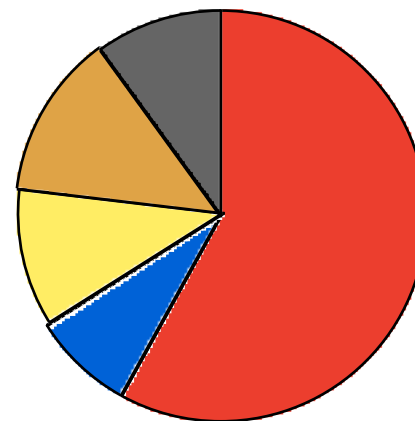
- ◇ Spänningstillståndet framför sprickan **reflekteras helt av spänningsintensitetsfaktorn** (under vissa förutsättningar)
- ◇ K_I beror av
 - magnitud hos pålagd **last** $\Rightarrow \sigma_{\text{nom}}$
 - **sprickans** aktuella **längd** $\Rightarrow a$
 - komponentens **geometri** $\Rightarrow f$
- ◇ Ett lämpligt **brottkriterium** för en komponent med en spricka är därför $K_I = K_{Ic}$
- ◇ Här är K_{Ic} den materialberoende brottsegheten.
- ◇ Eftersom spänningen vid sprickan går mot ∞ , är det **svårt att använda FEM för brottmekanisk analys**:
 - Resulterande spänningsnivå kommer att bero på hur nära sprickspetsen man analyserar spänningen
 - Detta beror i sin tur på hur fint elementnätet är framför sprickan

Utmattning

Definition

- ◇ På engelska "fatigue" från latinets *fatigare* – att tröttna
- ◇ Refererar till materialförändringar på **repeterad belastning**
- ◇ Sådan belastning kan leda till **sprickbildning**, **spricktillväxt** och slutligt **brott**
- ◇ Utmattningsbrott står för ungefär **60–90%** av alla mekaniska haverier
- ◇ Utmattningsbrott inträffar på **spänningsnivåer långt under den statiska hållfastheten**

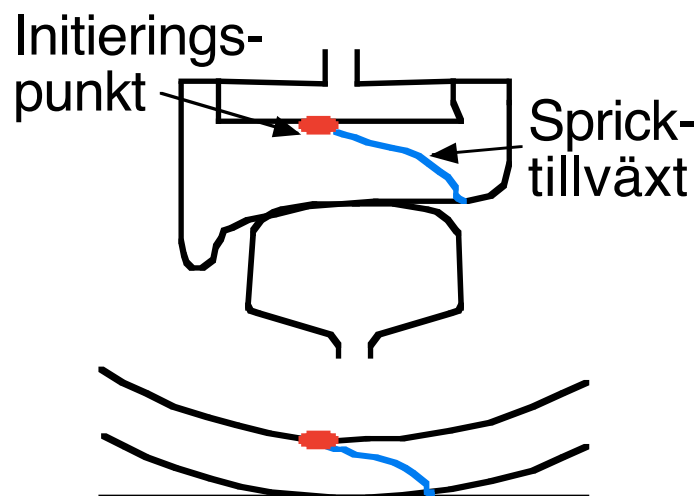
- Högcykelutmattning
- Lågcykelutmattning
- Annan utmattning
- Statiskt brott
- Annat brott, ej utmattning



Exempel: Eschede

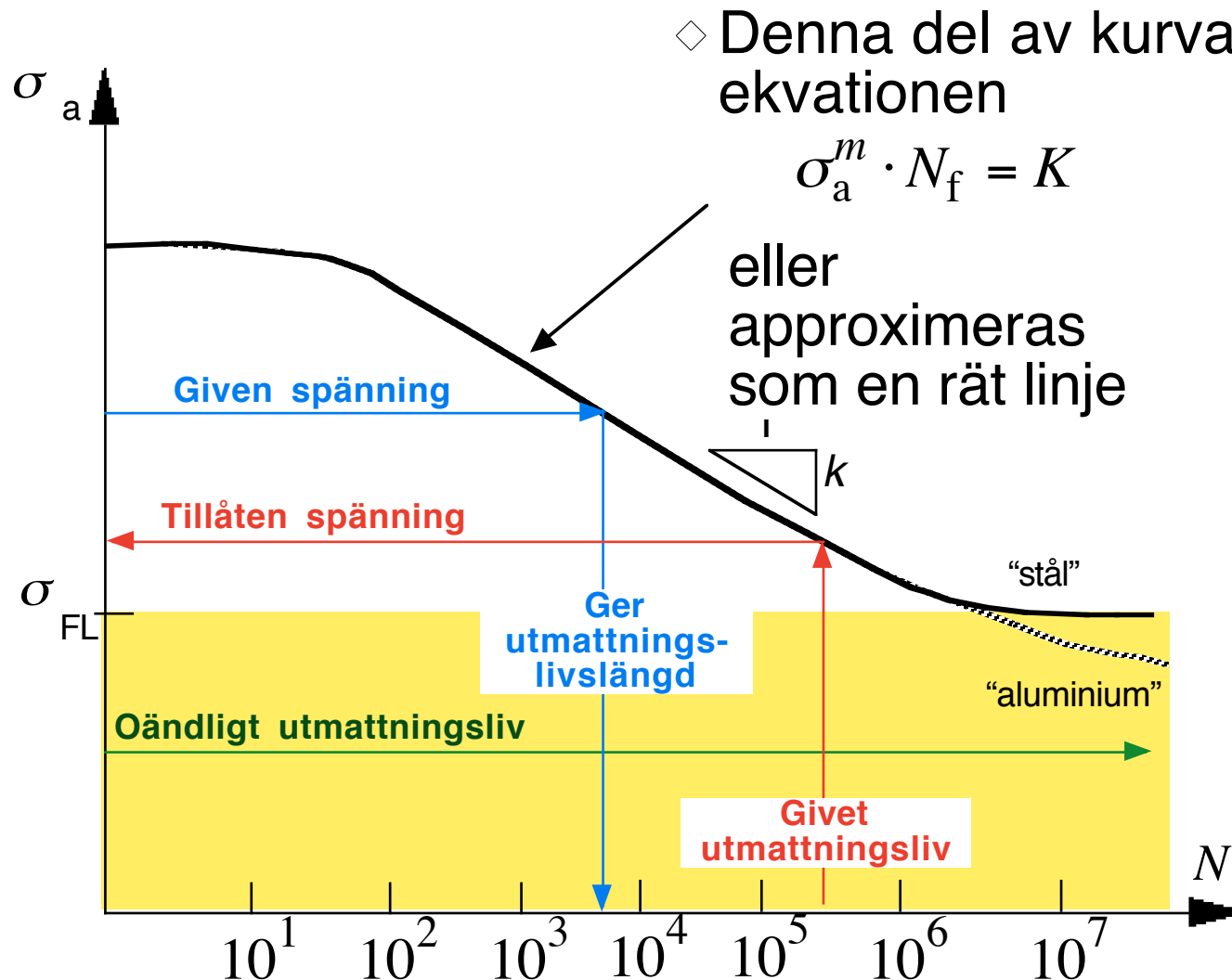
Orsak

- ◇ En spricka bildades på insidan av hjulingen
- ◇ Sprickan växte på grund av den **repeterade belastningen** då hjulet rullade
- ◇ Slutligen lossade hjulringen
- ◇ Tåget spårade ur då hjulet gick igenom en växel
- ◇ Det urspårade tåget kolliderade med en bro som kollapsade
- ◇ OBS! I Sverige finns inga ringade passagerarhjul!



Dimensionering

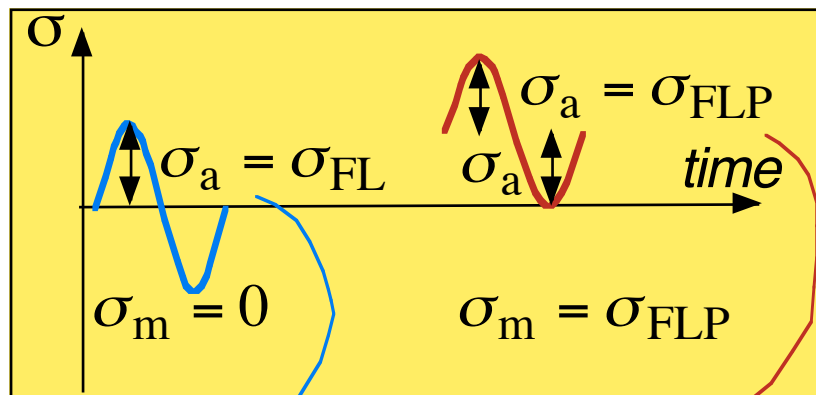
Wöhlerkurva



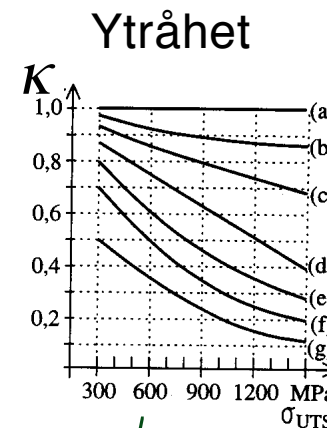
Gäller bara för **ett** visst mittvärde på spänningen

Dimensionering

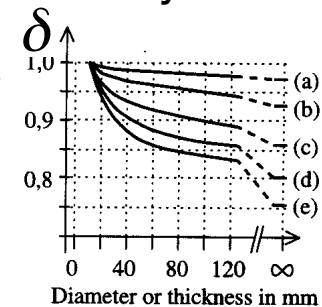
Haighdiagram



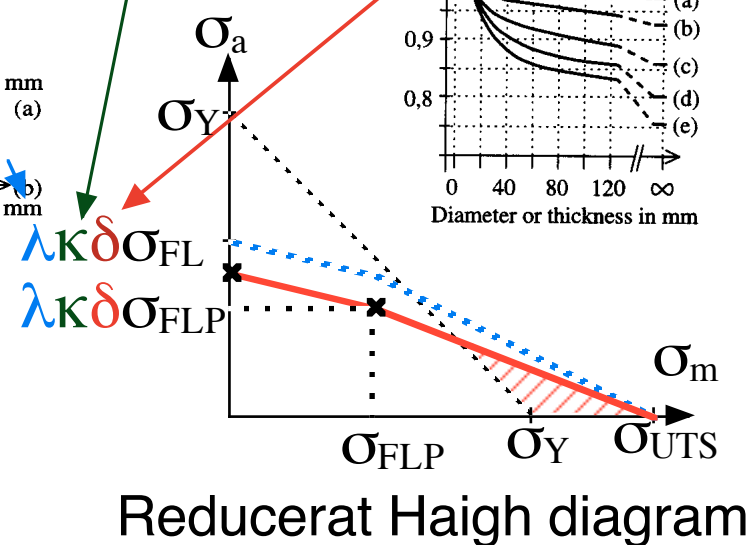
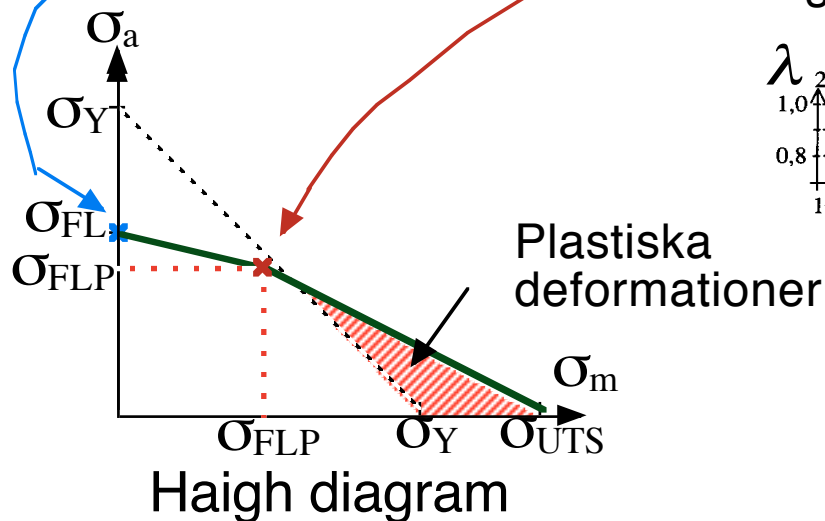
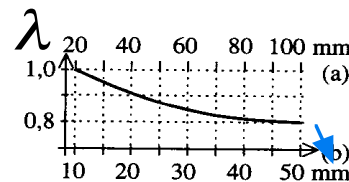
Gäller för alla mittvärden på spänningen, men informerar bara om utmattning / ingen utmattning



Belastad volym

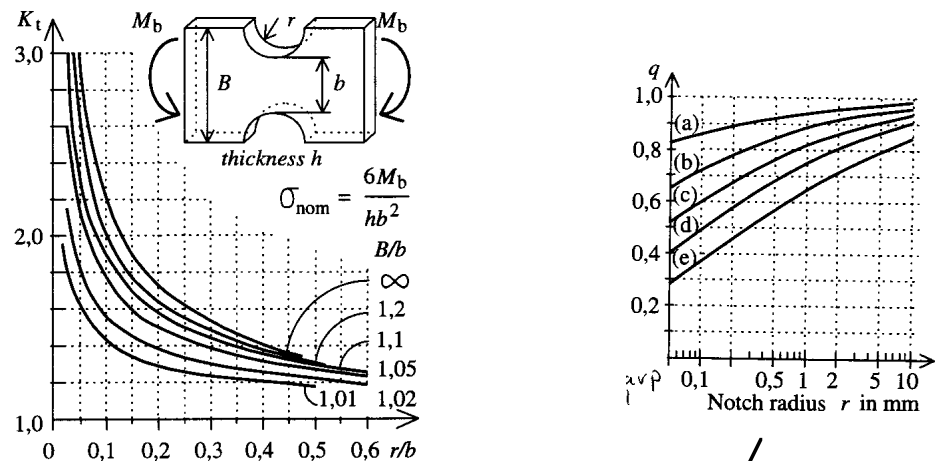


Material-storlek



Dimensionering

Haighdiagram II

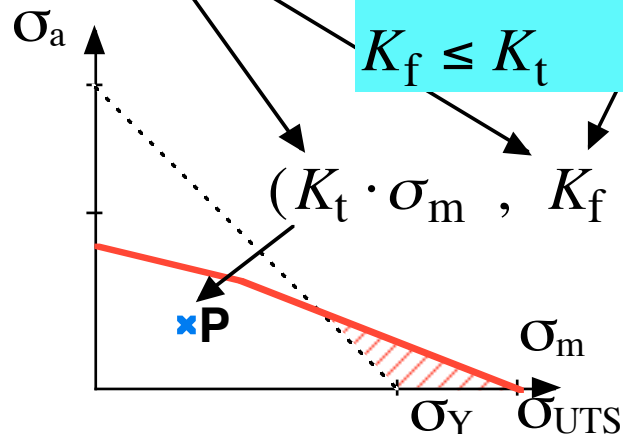


Bending of flat bar with notch

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$

$$K_f \leq K_t$$

$$(K_t \cdot \sigma_m, K_f \cdot \sigma_a)$$



Plasticitet:
"Medelvärdesproblem"

Utmattning:
"Svagaste-länk-problem"

Påverkande faktorer

- ◇ Spänning
 - amplitud
 - mittvärde
- ◇ Material
 - hållfasthet
 - volym
 - ytbeskaffenhet
- ◇ Geometri
 - spänningskoncentrationer
- ◇ ...

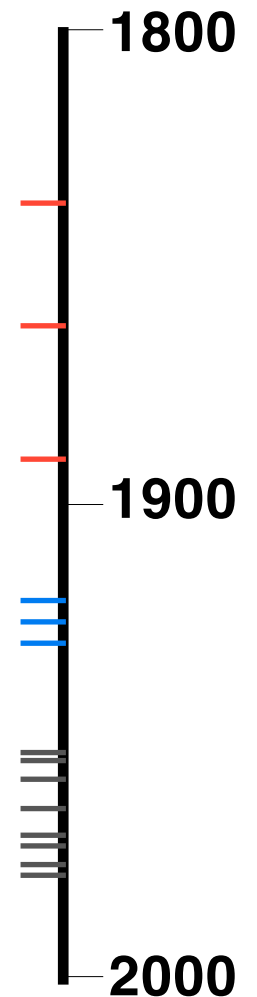
Dimensionering – brottmekanik

”Fail safe” dimensionering

- ◇ Identifiera en **kritisk spricklängd** som leder till brott
- ◇ Identifiera en **initiell spricklängd** som den största spricka man kan missa vid inspektion (mycket större än vad man kan hitta)
- ◇ Beräkna tillväxttid från **initiell spricklängd** till **kritisk spricklängd** from initial to critical size is computed.
- ◇ Inspektionsintervall sätts som halva denna tid så man kan missa sprickan vid en inspektion utan haverier
- ◇ Om man hittar en spricka:
 - reparera (eller byt ut) komponenten.
 - gör ny inspektion efter kortare tidsintervall
- ◇ Säkerställ också att brott i en komponent inte leder till totalhaveri.

Utmattningshistorik

- ◇ **1837** De första utmattningstesten (Albert)
- ◇ **1858** Dimensionering mot utmattning (Wöhler). Förslag på högre säkerhetsfaktorer för utmattning än för statiskt brott
- ◇ **1889** Spänningskoncentrationer (Kirsch)
- ◇ **1920** Grunden till brottmekaniken (Griffith)
- ◇ **1924** Ackumulering av utmattningsskador (Palmgren). Later by Serensen (1938) and Miner (1945)
- ◇ **1930** Insikt i att starkare material inte ger speciellt mycket högre utmattningshållfasthet (Gestaltsfestigkeit). Detta beror på att alla strukturer innehåller spänningskoncentrationer



Utmattningshistorik, forts

- ◇ **1954** de Havilland Comets krashar
- ◇ **1954** Lågcykelutmattning, LCF (Manson and Coffin)
- ◇ **1955** Koncepten "fail safe" and "safe life"
- ◇ **1958** Irwin återupptäcker Griffiths idéer -> Brottmekanik
- ◇ **1962** Kriterium för att beräkna spricktillväxt (Paris)
- ◇ **1968** Insikt om sprickslutningens inverkan (Elber)
- ◇ **1969** "Rainflow counting" (Matsuishi, DeJonge)
- ◇ **1972** "Moderna" kriterier för utmattningsanalys vid fleraxlig spänning (Dang Van)
- ◇ **1974** Krav på skadetålighet ("fail safe") (US Air Force)

